Untersuchungen

über die

Gruppen einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

philosophischen Facultät der Universität Breslau

zur

Erlangung der Doctorwürde

am

Dienstag, den 8. October 1889, Vormittags 12 Uhr,

in der Aula Leopoldina

öffentlich vertheidigen wird

Otto Landsberg

aus Breslau.

Opponenten:

G. Janowsky, Cand. des höheren Lehramts.

M. Klose, Cand. des höheren Lehramts.

4

Breslau.

Druck von Grass, Barth & Comp. (W. Friedrich.)

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Rosanes

in Hochachtung und Dankbarkeit

sowie

Seinen theuren Eltern

in kindlicher Liebe

gewidmet

vom

Verfasser.

Inhalts-Verzeichniss.

Seite

Einleitung ..... 9—11

I. Algebraische Untersuchungen.

(§ 1—9.)

§ 1. Elementare Sätze und Definitionen ..... 11—14
§ 2. Die zweigliedrige Gruppe. Die Problemstellung ..... 14—15
§ 3. Der Fall n = 4 und seine geometrische Deutung (Kreisgeometrie) ..... 15—17
§ 4. Der Fall n = 5 und seine geometrische Deutung (Kugelgeometrie) ..... 17—22
§ 5. Der Fall n = 6 ..... 22—37
§ 6. Ein Hilfssatz über specielle Strahlencomplexe des fünfdimensionalen Raumes ..... 37—40
§ 7. Die dreigliedrige Gruppe. Die Problemstellung ..... 40—41
§ 8. Der lineare Ebenencomplex und seine speciellen Fälle .. 41—55
§ 9. Die Constructionen der dreigliedrigen Gruppe ..... 56—67

II. Die geometrische Deutung.

(§ 10—14.)

§ 10. Die Gebilde von fünf Constanten. Versuch einer Geometrie des Strahlenbüschels im Raume. Der Kegelschnitt. Der lineare Strahlencomplex ..... 68—70

A. Die Geometrie der Kegelschnittgruppen.

(§ 11—12.)

§ 11. Die Substrate der Gruppen: Punkt- und Strahlenquadrupel, Curve 3. Ordnung und Klasse und ihre geometrische Abhängigkeit, falls die zugehörigen Gruppen sich schneiden 70—72
§ 12. Die Constructionen der Kegelschnittgruppen ..... 72—74

B. Die Geometrie der Gruppen von linearen Strahlencomplexen.

(§ 13—14.)

§ 13. Die Substrate der Gruppen: Das Geradenpaar im Raume, die Oberfläche 2. Ordnung und ihre geometrische Abhängigkeit, falls die zugehörigen Gruppen sich schneiden 75—78
§ 14. Die Constructionen der Complexgruppen ..... 79—81

Bis zu Plücker hat die analytische Geometrie, wie die Geometrie überhaupt, nur einfache Gebilde ihren Betrachtungen zu Grunde gelegt, den Punkt und die Gerade in der Ebene, Punkt und Ebene im Raume. Plücker ist im Wesentlichen der erste[1]), der principiell ein neues Grundgebilde in die Geometrie des Raumes einführte, das nicht mehr als einfach, sondern nur als Gruppe von einfachen Elementen aufzufassen war und zwar speciell als zweigliedrige Gruppe im Gebiete von 4 homogenen Veränderlichen, also von Punkten oder Ebenen im Raume, die gerade Linie.

Trotz der überaus grossen Fruchtbarkeit des Plückerschen Gedankens, an den besonders in den ersten Jahren nach dem Erscheinen des grundlegenden Werkes[2]) eine ungemein reichhaltige Litteratur anknüpft, scheint man, von einer einzigen, gleich zu besprechenden Ausnahme abgesehen, nie den Versuch gemacht zu haben, auch bei grösserer Zahl der Variabeln die möglichen Gruppen als selbständige Elemente zu studiren. Vielleicht hat die grössere Complication abgeschreckt, da die Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der Gruppe ungemein rasch wächst, vielleicht auch das — allerdings nur scheinbare — Fehlen der geometrischen Interpretation in Ebene und Raum, da doch die Deutung in höheren Räumen der Anschaulichkeit entbehrt. Beide Gründe mögen dazu beigetragen haben, dass eine Verallgemeinerung der Plücker'schen Untersuchungen und Resultate auf algebraischem Wege nicht versucht wurde.

---

[1]) Ueber die Vorläufer Plückers vergl. man Clebsch, Zum Gedächtniss an Plücker. Abhandl. d. Götting. Ges. d. W. 1871, Bd. XVI, Math.-phys. Klasse, S. 26.

[2]) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die gerade Linie als Raumelement. 1868.

Nur H. Schubert[1]) hat mit Hülfe der Methoden der abzählenden Geometrie hierher gehörige Resultate erlangt, die er aber nur für den n-dimensionalen Raum ausspricht, ohne auf Deutungen in Ebene und Raum einzugehen. Für den Fall, dass die Anzahl der Veränderlichen = 5 sei, hat Cyparissos Stephanos[2]) die zweigliedrige Gruppe studirt und die erlangten Resultate elementargeometrisch interpretirt. Da er aber dieselben ohne Beweis anführt, so bleibt es ungewiss, ob er sich einer algebraischen oder abzählenden Methode bedient hat. Der Fall n = 6 ist, soweit mir bekannt, nie algebraisch behandelt worden; und doch bietet er schon deshalb ein höheres Interesse, weil hier zum ersten Male auch die dreigliedrige Gruppe selbstständig auftritt, ohne, wie bei den vorhergehenden Fällen, vermöge des Princips der Dualität auf niedere Gruppen zurückgeführt werden zu können, und weil gerade bei ihr durch das Auftreten von 3 Indices und das dadurch bedingte Versagen der unmittelbaren Anwendung der Determinanten eigenthümliche Schwierigkeiten erwachsen. Dieser Fall ist in den folgenden Untersuchungen rein algebraisch studirt.

Es ergaben sich aber auch geometrisehe Deutungen der erlangten Resultate mit Hülfe einer Ueberlegung, die ich dann in allgemeinster Form bereits als von Plücker ausgesprochen erkannt habe. In der Gedächtnissrede auf Plücker berichtet nämlich Clebsch von dem grossen Geometer Folgendes[3]): „Gegenüber der directen Einführung eines Raumes von mehr als 3 Dimensionen pflegte er zu erörtern, wie schon die einfachste räumliche Conception, etwa die Ebene, hinreiche, um in ihr die Theorie einer Mannigfaltigkeit zu studiren. Denn man brauche nur ein Grundgebilde einzuführen, welches von einer hinlänglich grossen Anzahl von

[1]) Die n dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes. Math. Annalen XXVI. und Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension. Acta math. VIII.

[2]) Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace. Comptes rendus XCIII. 1, p. 578 ff. und 633 ff.

[3]) l. c. S. 31. Vergl. auch Clebsch, Vorles. über Geometrie, S. 385 Anm. 1.

Parametern abhängig sei, und kann dann diese Parameter, wie die Coordinaten eines Punktes in einem höheren Raume, behandeln, ohne auf einen solchen zurückgehen zu müssen."

In der That kann man hiernach jeden Raum von beliebiger Dimension auf Räume niederer Dimension abbilden. Der einfachste Fall einer solchen Abbildung, der der Ebene auf die Gerade, ist von Hesse[1]) in einer interessanten und feinsinnigen Arbeit betrachtet worden. Es werden der Punkt in der Ebene und das Punktepaar auf der Geraden in Correspondenz gesetzt, welche beide von 2 Constanten abhängen. Von 3 Constanten oder homogen von 4 Parametern hängen ab einerseits der Punkt im Raume, andererseits der Kreis in der Ebene. Es wird also hierdurch eine Abbildung vermittelt, welche den Raum in die Ebene abbildet. Ebenso kann der Raum von 4 Dimensionen mit unserem Raume so in Beziehung gesetzt werden, dass jedem Punkt des ersteren eine Kugel des letzteren entspricht. Dies ist bereits von Stephanos[2]) angegeben. Endlich kann in unserem Falle $n = 6$ der fünfdimensionale Raum sowohl auf die Ebene als auch auf den Raum abgebildet werden, indem nämlich sowohl der Kegelschnitt in der Ebene als auch der lineare Strahlencomplex im Raume homogen von 6 Parametern abhängt.[3]) Es wird also die geometrische Deutung diesen beiden so vielfach behandelten und scheinbar ganz erschöpften Gebilden eine neue Seite abgewinnen.

§ 1.

Elementare Definitionen und Sätze.

Jede Stelle eines Gebiets von n homogen Veränderlichen ist durch n Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ gegeben. Ich verstehe nun unter der m-gliedrigen Gruppe in diesem Gebiete die

---

[1]) Ein Uebertragungsprincip, Crelle's Journal, Bd. 66.

[2]) l. c. S. 579.

[3]) Ueber andere, allerdings hier nicht zu brauchende Gebilde von fünf Constanten vergl. S. 68.

Gesammtheit der Stellen, die definirt sind durch die Gleichung:

$$(1) \qquad x_\iota = \sum_1^m x_\iota^{(\mu)} \lambda^{(\mu)} \quad (\iota = 1, 2 \ldots n),$$

wo für $\lambda^{(\mu)}$ irgend beliebige m Grössen eintreten können. Es muss offenbar $m < n$ sein, da für $m \geqq n$ die Gleichungen (1) für beliebiges x in Bezug auf $\lambda^{(\mu)}$ lösbar sind. Damit die Gruppe wirklich eine m-gliedrige und nicht aus weniger als m Grössen componirt werden kann, ist nothwendig und hinreichend, dass in der Matrix

$$\left| x_\iota^{(\mu)} \right| \begin{pmatrix} \mu = 1 \ldots m \\ \iota = 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

nicht alle Determinanten m^{ten} Grades verschwinden.

Wir drücken dies kurz aus:

$$(2) \qquad \left| x_\iota^{(\mu)} \right| \neq 0 \begin{pmatrix} \mu = 1 \ldots m \\ \iota = 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Die Elemente x_ι^μ nehmen in der Gruppe keine bevorzugte Stellung ein, vielmehr können irgend m Elemente der Gruppe, welche der Ungleichung (2) genügen, ihre Stelle einnehmen.

Es bedürfen aber nur die Gruppen $m \leqq \frac{n}{2}$ einer selbstständigen Untersuchung. Es kann nämlich jeder m-gliedrigen Gruppe eine conjugirte[1]) (n—m)-gliedrige zugeordnet werden. Dieselbe besteht aus den Elementen u, welche der Gleichung:

$$(3) \quad \sum_1^n u_\iota x_\iota = 0 \text{ für alle Werthsysteme x der m-gliedrigen Gruppe genügen.}$$

Nach bekannten Sätzen über lineare Gleichungen bilden dann die Lösungen u von (3) eine (n—m)-gliedrige Gruppe. Da man leicht aus Eigenschaften einer Gruppe solche der conjugirten ableiten kann, so folgt, dass man nur die Gruppen $m \leqq \frac{n}{2}$ zu studiren braucht.

---

[1]) Rosanes, Math. Annalen, Bd. VI u. Crelle's Journal Bd. 76. Vergl. auch Clebsch, Geometrie S. 385.

Als Coordinaten einer Gruppe definiren wir die Determinanten m^{ten} Grades, die man aus der Matrix

$$\left| x_\iota^\mu \right| \quad \begin{pmatrix} \mu = 1 \ldots m \\ \iota = 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

herausschneiden kann. Dieselben sind gegenüber einer Vertauschung der Grundelemente der Gruppe bis auf einen constanten Factor unveränderlich und haben die Eigenschaft, dass jede Function derselben Art sich aus diesen $\binom{n}{m}$ homogen zusammensetzt.

Die $\binom{n}{m}$ Coordinaten sind ferner zwar abhängig, aber nicht linear. 2 conjugirte Gruppen haben dieselben Coordinaten, wie man z. B. aus Pasch[1]) erkennt. — Dass nicht beliebige $\binom{n}{m}$ Grössen als Coordinaten einer Gruppe sich darstellen lassen, folgt schon daraus, dass die Anzahl der Constanten der Gruppe stets kleiner ist als die Zahl der Coordinaten, sofern $n > 3$.

Die Constantenzahl finde ich am einfachsten folgendermaassen. Ich nehme m Elemente aus der Gruppe heraus; durch dieselben ist die (m-gliedrige) Gruppe bestimmt. Dass die Gruppe durch ein Element hindurchgeht, stellt eine n—mfache Bedingung dar, da ja jedes Element derselben nur noch $m-1$ zu bestimmende Constante hat. Soll also die Gruppe durch m beliebige Elemente hindurchgehen, so ergiebt dies m (n—m) Bedingungen[2]), und genau soviel Constante muss die Gruppe haben. Ich füge noch einige einfache Sätze über die gemeinsamen Elemente der Gruppen hinzu, die leicht aus der Theorie der linearen Gleichungen folgen und von Veronese[3]) und Schubert[4]) zuerst für n-dimensionale Räume ausgesprochen sind.

---

[1]) Pasch, Zur Theorie der linearen Complexe. Crelle, Bd. 75, S. 108.

[2]) Schubert, Math. Annalen XXVI, § 2 V.

[3]) Veronese, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimens. etc. Math. Ann. XIX.

[4]) Schubert l. c. § 2; II, III, IV.

I. Eine p- und eine q-gliedrige Gruppe haben, wenn $p + q > n$ eine $(p + q - n)$-gliedrige gemein.

II. Haben eine p- und eine q-gliedrige Gruppe eine r-gliedrige, aber keine $(r + 1)$-gliedrige gemein, so giebt es immer eine und nur eine $(p + q - r)$-gliedrige Gruppe, welche beide enthält.

III. Es ist eine $r(n + r - p - q)$fache Bedingung, dass eine p-gliedrige Gruppe mit einer q-gliedrigen eine r-gliedrige, aber keine $(r + 1)$-gliedrige gemein hat.

§ 2.

Die zweigliedrige Gruppe. Die Problemstellung.

Die zweigliedrige Gruppe, das Büschel, hat $\binom{n}{2} = n\frac{(n-1)}{2}$ Coordinaten. Wir beginnen mit derselben, weil nach dem Vorigen in dem von uns speciell behandelten Fall $n = 6$ nur die Gruppen $m = 2$ und 3 in Betracht kommen. Wir wollen jedoch die Aufstellung des Problems für ein allgemeines n vornehmen schon deshalb, weil wir auch die Fälle $n = 4, 5$ vorauszuschicken haben. Die hier behandelten Probleme beziehen sich hauptsächlich auf die Anzahlbestimmungen der Lösungen bei linearen Constructionen der Gruppen. Nun ist für $m = 2$ also für das Büschel eine lineare Bedingung dargestellt als lineare Function der $\binom{n}{2}$ Coordinaten, d. h. der Determinanten 2. Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1, & y_2 & \ldots & y_n \end{vmatrix}$$

Eine lineare Gleichung zwischen denselben hat $n\frac{(n-1)}{2}$ Coëfficienten $a_{\iota\varkappa}$ $(\iota < \varkappa;\ \iota, \varkappa = 1 \ldots n)$. Wir können aber denselben dadurch eine symmetrischere Form geben, dass wir noch $n\frac{(n+1)}{2}$ Grössen $a_{\iota\varkappa}$ einführen durch die Gleichungen:

$$a_{\iota\varkappa} + a_{\varkappa\iota} = 0 \quad (\iota, \varkappa = 1 \ldots n) \text{ also } a_{\iota\iota} = 0.$$

Dann schreibt sich die lineare Bedingung in der Form:

$$(1) \qquad \sum_{\iota,\varkappa=1\,..\,n} a_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa = 0;\ a_{\iota\varkappa} + a_{\varkappa\iota} = 0.$$

Soll nun ein Büschel vollständig bestimmt werden, so sind dazu $2\,n - 4$ Bedingungen nothwendig und hinreichend. Die Aufgabe der algebraischen Construction kommt also auf ein Eliminationsproblem hinaus von $2\,n$ Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ aus $2\,n - 4$ Gleichungen von der Form (1).

Es giebt aber noch eine andere Form für lineare Bedingungsgleichungen des Büschels, nämlich solche, welche die x_ι und y_ι für sich getrennt enthalten:

$$(2) \qquad \sum_\varkappa a_\varkappa\, x_\varkappa = 0;\ \sum a_\varkappa\, y_\varkappa = 0.$$

Dieselben lassen sich allerdings auf die Form (1) bringen

$$(3) \qquad \sum_\varkappa a_\varkappa\, (x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota) = 0$$

und 2 solche Gleichungen (3) für verschiedene Indices ι u. ι^1 ersetzen die Gleichungen (2) jedoch mit der Bedingung:

$$x_\iota\, y_{\iota^1} - x_{\iota^1}\, y_\iota \neq 0.$$

In diesem Fall wird jedoch die Lösung besser dadurch erreicht, dass man als Operationsbasis eine von nur $(n - 1)$ Parametern abhängige nimmt, nämlich die durch die Gleichung $\sum a_\varkappa\, x_\varkappa = 0$ definirte $(n - 1)$-gliedrige Gruppe, so dass der Fall von n auf $n - 1$ zurückgeführt ist. Es genügt also den Fall zu betrachten, wo $2\,n - 4$ Gleichungen der Form (1) gegeben sind. Wir werden denselben für $n = 6$ algebraisch lösen, schicken jedoch zunächst die Fälle $n = 4$ und 5 voraus, theils um die Methode deutlich zu machen, theils auch um Einiges noch nicht Veröffentlichte daran anzuknüpfen.

§ 3.

Der Fall $n = 4$.

Wir haben $2\,n - 4 = 4$ Gleichungen von der Form (1) des § 2 zu lösen:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{\iota,\varkappa} a^{\lambda}_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa = 0 \quad (\iota,\ \varkappa,\ \lambda = 1,\ 2\ ..\ 4) \\ a_{\iota\varkappa} + a_{\varkappa\iota} = 0. \end{cases}$$

Das Büschel hat 6 Coordinaten $v_{\iota\varkappa} = x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota$ zwischen denen die bekannte Relation besteht:

$$(2) \qquad v_{12} \cdot v_{34} + v_{13} \cdot v_{42} + v_{14} \cdot v_{23} = 0$$

und umgekehrt, wenn zwischen 6 Grössen v die Relation (2) besteht, so lassen sich dieselben als Determinanten $x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota$ darstellen.[1])

Nun haben die Gleichungen:

$$\sum_{\iota,\varkappa} a^{\lambda}_{\iota\varkappa}\, g_{\iota\varkappa} = 0 \quad (\lambda = 1, 2 \ldots 4)$$

als 4 homogene Gleichungen mit 6 Unbestimmten 2 Lösungen $A^{(1)}_{\iota\varkappa}$, $A^{(2)}_{\iota\varkappa}$; es muss daher nach (1) sein

$$(3) \qquad x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota = \xi_1\, A^{(1)}_{\iota\varkappa} + \xi_2\, A^{(2)}_{\iota\varkappa}.$$

Damit nun $\xi_1\, A^{(1)}_{\iota\varkappa} + \xi_2\, A^{(2)}_{\iota\varkappa}$ sich in dieser Form darstellen lässt, so ist nothwendig, dass die Relation (2) besteht. Dieselbe ergiebt als quadratische Gleichung für ξ_1 u. ξ_2 2 Lösungen, die nach (3) 2 Lösungen (xy), 2 Büschel, liefern. Das Resultat kann in folgenden Formen ausgesprochen werden. Zunächst rein algebraisch: 4 in 2.4 Unbestimmten bilineare Gleichungen mit alternirenden Coëfficienten haben nur 2 wesentlich verschiedene Lösungen. Geometrisch können wir sagen: 4 lineare Strahlencomplexe haben 2 Strahlen gemein. Da es aber der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, wenn man 4 specielle Complexe, 4 Gerade, nimmt, so können wir sagen: Es giebt (im Allgemeinen) 2 Strahlen, welche 4 schneiden. Endlich können wir das letztere in der Ebene deuten. Jedem Raumpunkte entspricht in der Ebene ein Kreis, da beide von 4 Parametern homogen abhängen. Der Geraden entspricht dann das Kreisbüschel, oder man kann auch sagen das Punktepaar als Grundpunkte desselben. Schneiden sich 2 Gerade, so haben die entsprechen-

---

[1]) Cf. z. B. Pasch l. c. S. 129. Die Methode von Pasch weicht für $n = 4$ nur unwesentlich von der obigen ab. Trotzdem ist diese Abweichung bedeutsam, da für $n = 6$ die Methode von Pasch unmöglich ist.

den Büschel einen Kreis gemein, d. h. die 2 . 2 Grundpunkte liegen auf einem Kreise. Wir haben also den Satz:

Es giebt 2 Punktepaare, welche mit 4 gegebenen Punktepaaren je auf einem Kreise liegen.

Sind nur 3 Punktepaare gegeben, so giebt es unendlich viele, welche mit ihnen je auf einem Kreise liegen.

Dieselben liegen auf einer Curve 4. Ordnung, welche in den beiden imaginären Kreispunkten zwei Doppelpunkte besitzt. Diese Curve ist die Abbildung des Hyperboloids. Wie dieses zwei Regelschaaren besitzt, von denen jede Gerade jede Gerade der anderen Schaar schneidet, so besitzt die Curve zwei Schaaren von Punktepaaren, von denen je ein Paar der einen mit keinem derselben, aber mit jedem der anderen auf einem Kreise liegt.

§ 4.

Der Fall n = 5.

Das Büschel hat $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ Coordinaten:

$$(1) \qquad v_{\iota\varkappa} = x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota \qquad (\iota, \varkappa = 1 \ldots 5).$$

Bilden wir aus den $v_{\iota\varkappa}$ die Determinante

$$| v_{\iota\varkappa} | \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2 \ldots 5),$$

so ist dieselbe eine schiefe Determinante[1]) vom Grade 5, also = 0. Es sind aber auch die Unterdeterminanten des dritten und vierten Grades = 0. Umgekehrt behaupte ich: Sind in einer schiefen Determinante

$$(2) \qquad | v_{\iota\varkappa} | \quad (\iota, \varkappa = 1 \ldots 5) \qquad v_{\iota\varkappa} + v_{\varkappa\iota} = 0$$

die Unterdeterminanten vierten und folglich auch die dritten Grades = 0, so lassen sich die $v_{\iota\varkappa}$ in der Form (1) darstellen. — Denn wenn die Unterdeterminanten vierten und folglich auch die dritten Grades verschwinden, so haben die Gleichungen:

$$(3) \qquad \sum_{\varkappa} v_{\iota\varkappa} X_\varkappa = 0 \qquad (\iota = 1 \ldots 5)$$

---

[1]) Déterminant gauche.

3 Lösungen, etwa $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$; dann giebt es 2 Systeme x_ι y_ι (die zu $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ conjugirte Gruppe) von der Beschaffenheit, dass:

$$(4)\qquad \begin{cases} \Sigma\, x_\iota\, \alpha_\iota = \Sigma\, x_\iota\, \beta_\iota = \Sigma\, x_\iota\, \gamma_\iota = 0 \\ \Sigma\, y_\iota\, \alpha_\iota = \Sigma\, y_\iota\, \beta_\iota = \Sigma\, y_\iota\, \gamma_\iota = 0 \end{cases}$$

und nur 2 solche, d. h. jedes andere ist von ihnen linear abhängig. Nun ist aber auch

$$\Sigma\, v_{\iota\varkappa}\, \alpha_\varkappa = 0,\ \Sigma\, v_{\iota\varkappa}\, \beta_\varkappa = 0,\ \Sigma\, v_{\iota\varkappa}\, \gamma_\varkappa = 0, \text{ also:}$$

$$v_{\iota\varkappa} = \lambda^\iota\, x_\varkappa + \mu^\iota\, y_\varkappa.$$

Da aber $v_{\iota\varkappa} + v_{\varkappa\iota} = 0$ so folgt:

$$\lambda^\iota\, x_\varkappa + \mu^\iota\, y_\varkappa + \lambda^\varkappa\, x_\iota + \mu^\varkappa\, y_\iota = 0.$$

Setzen wir zunächst $\iota = \varkappa$, so folgt

$\lambda^\iota\, x_\iota + \mu^\iota\, y_\iota = 0$ also $\lambda^\iota = -A^\iota\, y_\iota$ und $\mu^\iota = +A^\iota\, x_\iota$.

Dann ist aber:

$$A^\iota\,(x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota) - A^\varkappa\,(x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota) = 0, \text{ also}$$

$$A^\iota = A^\varkappa = 1,$$

da es nur auf die Verhältnisse ankommt. Mithin ist $\lambda^\iota = -y_\iota$, $\mu^\iota = x_\iota$, also

$$v_{\iota\varkappa} = x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota . \qquad \text{D. h.}$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass 10 Grössen sich als Büschel-Coordinaten darstellen lassen, ist die, dass die aus den 10 Grössen durch Vervollständigung gebildete schiefe Determinante einen Defect hat, der grösser ist als 1.

Da nun die Determinante $|v_{\iota\varkappa}|$ selbst $= 0$, so sind die ersten Minoren zeilen- und colonnenweise proportional und zwar den 5 Grössen:

$$(5)\qquad (\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu) = v_{\iota\varkappa}\, v_{\lambda\mu} + v_{\iota\lambda}\, v_{\mu\varkappa} + v_{\iota\mu}\, v_{\varkappa\lambda}.$$

Diese Grössen müssen also $= 0$ sein, wenn $v_{\iota\varkappa}$ die Form (1) haben soll. Wir sind jetzt soweit gelangt, um die

Methode, die wir für n = 4 anwandten, übertragen zu können.

Wir haben die Gleichungen:

$$(6) \qquad \sum_{\iota,\,\varkappa} a^{\lambda}_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa = 0 \qquad \begin{pmatrix} \iota, \varkappa = 1 \ldots 5 \\ \lambda = 1 \ldots 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{wo } (7) \qquad a^{\lambda}_{\iota\varkappa} + a^{\lambda}_{\varkappa\iota} = 0$$

und es ist die Zahl der Lösungen zu berechnen.

Die 6 allgemeineren Gleichungen mit 10 Unbestimmten

$$\Sigma\, a^{\lambda}_{\iota\varkappa}\, g_{\iota\varkappa} = 0$$

haben 4 Lösungen, aus denselben $A^{(1)}_{\iota\varkappa}$, $A^{(2)}_{\iota\varkappa}$, $A^{(3)}_{\iota\varkappa}$, $A^{(4)}_{\iota\varkappa}$ lassen sich alle linear zusammensetzen, also auch die gesuchte in der Form:

$$v_{\iota\varkappa} = x_\iota\, y_\varkappa - x_\varkappa\, y_\iota = \sum_1^4 \xi_\lambda\, A^{\lambda}_{\iota\varkappa}.$$

Nach dem Vorigen kommt es jetzt darauf an, die Parameter ξ_λ so zu bestimmen, dass die 5 Grössen (5) = 0 sind. Zwischen denselben besteht folgende Abhängigkeit:

$$(7)\ v_{1\lambda}\,(2\,3\,4\,5) + v_{2\lambda}\,(3\,4\,5\,1) + v_{3\lambda}\,(4\,5\,1\,2) + v_{4\lambda}\,(5\,1\,2\,3) + v_{5\lambda}\,(1\,2\,3\,4) = 0 \quad (\lambda = 1 \ldots 5).$$

Es sind daher drei der Grössen unabhängig. Wir nehmen dazu etwa die drei (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 4 5).

Die drei Gleichungen (1234) = 0, (1235) = 0, (1245) = 0 haben 2 . 2 . 2 = 8 Lösungen. Für dieselben ist, wie aus (7) folgt

$$v_{1\lambda}\,(2\,3\,4\,5) + v_{2\lambda}\,(3\,4\,5\,1) = 0. \quad \text{D. h.}$$

entweder (2345) = (3451) = 0 oder die Unterdeterminanten

$$(8)\ v_{12} = 0;\ v_{13}\cdot v_{42} - v_{14}\cdot v_{32} = 0;\ v_{13}\cdot v_{52} - v_{15}\cdot v_{32} = 0;\ v_{14}\cdot v_{52} - v_{15}\cdot v_{42} = 0.$$

Nun haben, falls wir der einfacheren Ausdrucksweise halber die ξ_λ als Raumcoordinaten deuten, die 2 Flächen 2. Ordnung: $v_{13}\cdot v_{42} - v_{14}\cdot v_{32} = 0$; $v_{13}\cdot v_{52} - v_{15}\cdot v_{32} = 0$ eine Raumcurve 4. Ordnung gemein. Dieselbe zerfällt in die Gerade ($v_{13} = 0$; $v_{23} = 0$) und in eine Raumcurve 3. Ordnung, durch die auch $v_{14}\cdot v_{52} - v_{15}\cdot v_{42} = 0$ hindurchgeht. Die Bedingungen (8) werden daher durch

3 Punkte erfüllt. Dieselben sind von den erhaltenen 8 in Abzug zu bringen, so dass es fünf Systeme von Parametern giebt, welchen Büschel entsprechen.[1]) Wir können also sagen: 6 in 2.5 Unbestimmten bilineare Gleichungen mit alternirenden Coëfficienten haben 5 Lösungen. Oder: Das Gewicht der fünf Gleichungen (5) ist = fünf.

Bezeichnen wir ferner den Inbegriff der Strahlen (x y) des 4 dimensionalen Raumes, die der Gleichung

$$\Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa = 0$$

genügen, als linearen Complex, so können wir sagen:

Im Raume von 4 Dimensionen haben 6 lineare Complexe 5 Strahlen gemein, oder auch:

Die 4gliedrige Complexgruppe enthält fünf Strahlen.

Da folglich die 6gliedrige Complexgruppe unendlich viele Büschel oder, was hier dasselbe ist, dreigliedrige Gruppen (da $3 + 2 = 5$) enthält, so kann ich obiges Resultat auch aussprechen. Es giebt für $n = 5$ fünf zwei- (drei-) gliedrige Gruppen, welche mit 6 gegebenen drei- (zwei-) gliedrigen je ein Element gemein haben.

Es ist eine einfache Bedingung, dass eine 3- und eine 2gliedrige Gruppe ein Element gemein haben, dagegen eine 2fache, dass zwei 2gliedrige ein Element gemein haben. Wir können daher ein Büschel auch dadurch bestimmen, dass es mit ν zweigliedrigen und $6 - 2\nu$ dreigliedrigen Gruppen je ein Element gemein hat.

Der Fall $\nu = 0$ ist bereits behandelt. Der Fall $\nu = 1$ wird folgendermaassen auf den vorigen zurückgeführt.

Es sei die zweigliedrige Gruppe (a, b), so ergänze ich sie durch Hinzufügung beliebiger Elemente zu zwei verschiedenen dreigliedrigen Gruppen (a, b, c) und (a, b, d). Dann construire ich die zweigliedrigen Gruppen, welche mit den gegebenen vier Gruppen und mit (a, b, c) und (a, b, d) ein Element gemein haben. Es sind dies fünf. Hat aber eine zweigliedrige Gruppe mit (a, b, c) und (a, b, d) je ein Ele-

[1]) Stephanos l. c.

ment gemein, so hat sie ein solches entweder mit (a, b) gemein oder sie liegt in der Gruppe (a, b, c, d). Im letzteren Falle hängen die zu suchenden Elemente nur von 4 Parametern ab, wir haben also den Fall $n = 4$ und wissen bereits, dass es 2 solche Büschel giebt. Diese kommen von den fünf gefundenen in Abzug, so dass das Problem für $\nu = 1$, $5 - 2 = 3$ Lösungen hat.

Dieselbe Methode der Zurückführung ergiebt für $\nu = 2$ sowohl, als für $\nu = 3$ die Lösungszahl: 2 resp. 1.

Die Anzahl der zwei(drei-)gliedrigen Gruppen, welche mit ν zwei(drei-)gliedrigen Gruppen ein Element (resp. ein Büschel), sowie mit $6 - 2\nu$ drei-(zwei-)gliedrigen Gruppen ein Element gemein haben, ist für $\nu = 0, 1, 2, 3$ gleich 5, 3, 2, 1.

Diese Sätze können wir jetzt auf besondere Systeme von fünf Parametern anwenden.

Insbesondere heisst der allgemeinste Satz für den 4dimensionalen Raum ausgesprochen:

Es giebt 5 Strahlen (Ebenen), welche 6 gegebene Ebenen (Strahlen) schneiden.[1])

Aber auch die Kugeln bilden ein solches System.[2]) Die 2gliedrige Gruppe ist die Gesammtheit der Kugeln, die durch einen Kreis gehen; die 3gliedrige besteht aus allen denen, die durch ein Punktepaar gehen. Es lassen sich daher die gelösten Aufgaben deuten als Aufgaben für Kreise resp. Punktepaare im Raume, da ja hier die zwei- und dreigliedrige Gruppe sich als conjugirte[3]) gegenüberstehen.

Es giebt also sowohl fünf Kreise, welche mit 6 gegebenen Punktepaaren auf einer Kugel liegen,

---

[1]) Schubert l. c.

[2]) Stephanos l. c.

[3]) Eine Kugel hat 4 Coordinaten, die Raumcoordinaten des Centrums etwa und die Länge des Radius. Die gegenüberstehende 4gliedrige Gruppe ebenfalls 4, etwa die Coordinaten des Potenzpunktes und die Wurzel aus der Potenz. Sind die Coord. beider Gebilde gleich, so sind dieselben nach S. 13 conjugirt, d. h.: Zu einer Kugelgruppe ist conjugirt die Gruppe der sie rechtwinklig schneidenden Kugeln.

als auch fünf Punktepaare, welche mit 6 gegebenen Kreisen auf einer Kugel liegen.

Ferner giebt es zu je 4 gegebenen Kreisen (Punktepaaren) ein fünftes, dessen Coordinaten von denen der ersten vier linear abhängen. Geometrisch hat der fünfte Kreis die Eigenschaften mit allen Punktepaaren, die mit den 4 gegebenen auf einer Kugel liegen, ebenfalls auf einer Kugel zu liegen. Analog bei Punktepaaren. Die Configuration von 5 Kreisen hat Stephanos untersucht und Pentacyclus benannt.

Auch die anderen Sätze lassen sich analog deuten:

Es giebt 3, 2, 1 Kreise, welche 1, 2, 3 Kreise zweipunktig schneiden und mit 4, 2, 0 Punktepaaren auf einer Kugel liegen. Und 3, 2, 1 Punktepaare, welche mit 1, 2, 3 Punktepaaren Kreisvierecke bilden und mit 4, 2, 0 Kreisen auf einer Kugel liegen.

Auf den letzten Satz von Kreisen: Es giebt einen Kreis, welcher 3 Kreise zweipunktig schneidet, gründet Stephanos die Construction des fünften Kreises des Pentacyclus aus den 4 gegebenen und citirt Darboux[1]) als Entdecker desselben. Ebenso giebt es ein Punktepaar, das mit 3 gegebenen auf einem Kreise liegt, ein geometrisch unmittelbar einleuchtendes Resultat.

§ 5.

Der Fall n = 6.

Das Büschel hat hier 15 Coordinaten und 8 Constante. Wir beginnen auch hier damit, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzustellen, damit 15 Grössen $v_{\iota\varkappa}$ Büschelcoordinaten sind. Wir ergänzen durch Hinzufügung von 21 Grössen die 15 zu der schiefen Determinante

$$(1) \qquad |v_{\iota\varkappa}| \quad (\iota, \varkappa = 1 \ldots 6); \; v_{\iota\varkappa} + v_{\varkappa\iota} = 0.$$

Dann ist nothwendig, dass dieselbe den Defect 4 hat. Denn für jedes zu dem Büschel $v_{\iota\varkappa} = x_\iota y_\varkappa - x_\varkappa y_\iota$ conjugirte Element X ist $\Sigma v_{\iota\varkappa} X_\varkappa = 0$.

---

[1]) Darboux, Comptes rendus. T. 92 p. 446—448.

Dies ist aber auch hinreichend, denn es sei der Defect der Determinante (1) = 4, so haben die Gleichungen:

$$(2) \qquad \sum_{\varkappa} X_\varkappa \; v_{\iota\varkappa} = 0 \qquad (\iota = 1 \ldots 6)$$

4 Lösungen, etwa $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$, $\delta_\varkappa$, so dass also

$$(3) \quad \Sigma\, v_{\iota\varkappa}\; \alpha_\varkappa = \Sigma\, v_{\iota\varkappa}\; \beta_\varkappa = \Sigma\, v_{\iota\varkappa}\; \gamma_\varkappa = \Sigma\, v_{\iota\varkappa}\; \delta_\varkappa = 0.$$

Die zu der viergliedrigen Gruppe ($\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$) conjugirte zweigliedrige sei x y, so dass also:

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma\, \alpha_\iota\; x_\iota = \Sigma\, \beta_\iota\; x_\iota = \Sigma\, \gamma_\iota\; x_\iota = \Sigma\, \delta_\iota\; x_\iota = 0, \\ \Sigma\, \alpha_\iota\; y_\iota = \Sigma\, \beta_\iota\; y_\iota = \Sigma\, \gamma_\iota\; y_\iota = \Sigma\, \delta_\iota\; y_\iota = 0. \end{cases}$$

Da nun (x y) die einzigen Lösungen von (4), so ergiebt sich aus (3):

$$(5) \qquad v_{\iota\varkappa} = \lambda^\iota\; x_\varkappa + \mu^\iota\; y_\varkappa.$$

Nun ist aber $v_{\iota\varkappa} + v_{\varkappa\iota} = 0$ und $v_{\iota\iota} = 0$ also,

$\lambda^\iota\; x_\iota + \mu^\iota\; y_\iota = 0$, d. h. $\lambda^\iota = -A^\iota\; y_\iota$ und $\mu^\iota = A^\iota\; x_\iota$.

Setzen wir dies in $v_{\iota\varkappa} + v_{\varkappa\iota} = 0$ ein, so ergiebt sich:

$$A^\iota\; (x_\iota\; y_\varkappa - x_\varkappa\; y_\iota) - A^\varkappa\; (x_\iota\; y_\varkappa - x_\varkappa\; y_\iota) = 0, \text{ also}$$

$A^\iota = A^\varkappa = 1$, da es nur auf Verhältnisse ankommt.

Mithin (6) $v_{\iota\varkappa} = x_\iota\; y_\varkappa - x_\varkappa\; y_\iota$, was zu beweisen war.

Diese nothwendige und hinreichende Bedingung ist jetzt auf die möglichst kleinste Zahl von Gleichungen zurückzuführen. Zunächst ist bekannt, dass schon aus dem Verschwinden der Unterdeterminanten 4. Grades einer schiefen Determinante das derjenigen 3. Grades folgt. Ferner lassen sich aber auch die Unterdeterminanten 4. Grades durch weniger Grössen ausdrücken. Ausgezeichnet unter ihnen sind nämlich diejenigen, welche selbst wieder schiefe Determinanten sind. Dies ist bei denen der Fall, zu deren Bildung die gleichen Zeilen und Colonnen verwandt sind. Dieselben haben den Grad 4 und sind volle Quadrate. Ich erhalte auf diese Weise $\binom{6}{4}$ quadratische Ausdrücke, nämlich die Quadrate der 15 Ausdrücke:

$$(7) \quad (\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu) = v_{\iota\varkappa} \cdot v_{\lambda\mu} + v_{\iota\lambda} \cdot v_{\mu\varkappa} + v_{\iota\mu} \cdot v_{\varkappa\lambda}.$$

Setzen wir die Determinante selbst:

(8) $\quad F^2 = |\, v_{\iota\varkappa} \,| = V \quad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$

so wird:

(9) $\quad (\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu)^2 = \dfrac{d^2V}{dv_{\nu\nu} \cdot dv_{\rho\rho}} = -\ \dfrac{d^2V}{dv_{\nu\rho} \cdot dv_{\rho\nu}},$

wobei $\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \rho$ eine positive Anordnung der Indices 1, 2 . . . 6 ist, was wir bezeichnen wollen durch

(10) $\quad (\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \rho) = +\ 1.$

Sollen also die Determinanten 4. Grades $= 0$ sein, so muss sein:

(11) $\quad (\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu) = 0 \quad (\iota, \varkappa, \lambda, \mu = 1, 2 \ldots 6).$

Dies ist aber auch hinreichend. Denn alle Unterdeterminanten 4. Grades lassen sich durch jene 15 Grössen $(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu)$ ausdrücken. Nehmen wir zunächst diejenigen Unterdeterminanten, zu deren Bildung 3 gleiche, d. h. mit gleichen Indices versehene Zeilen und Colonnen Verwendung gefunden, während die vierte Zeile und Colonne verschiedenen Index besitzen. Dieselbe lässt sich auf eine Weise als Unterdeterminante einer Minore, die eine schiefe Determinante ist, darstellen, nämlich dadurch, dass man zu der vierten bereits verwendeten Zeile und Colonne die gleiche Colonne resp. Zeile hinzufügt. Die so erhaltene Determinante ist $= 0$, weil sie von ungeradem Grade ist. Es sind daher die ersten Minoren proportional und zwar sowohl zeilen- als auch colonnenweise. Zu der Determinante, deren Werth wir suchen, gehören nun 2 andere, deren eine zu einem Gliede derselben Zeile, deren andere zu einem Gliede derselben Colonne erste Minore der Determinante 5. Grades ist, und die beide schiefe Determinanten 4. Grades, also Quadrate zweier Grössen $(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu)$ sind. Da nun die gesuchte Determinante zu beiden proportional sein soll, so muss sie das Product der beiden zugehörigen $(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu)$ sein, höchstens noch mit einem constanten Factor versehen, der aber, wie leicht zu sehen, $= 1$ ist.

Es sei die zu berechende Determinante $= \dfrac{d^2V}{dv_{\nu\rho} \cdot dv_{\mu\mu}},$

so dass dieselbe von den Zeilen $\iota\ \varkappa\ \lambda\ \rho$ und den Colonnen

$\iota\ \varkappa\ \lambda\ \nu$ gebildet wird. Wir fügen die Zeile ν und die Colonne ρ hinzu. Dann ist die erhaltene Determinante $= 0$. Die proportionalen Determinanten, von denen oben die Rede war, sind die durch Weglassung der ρten Zeile und Colonne resp. der νten Zeile und Colonne gebildeten. Ausserdem fehlt in beiden die μte Zeile und Colonne, weil dieselbe in der ganzen Determinante fehlt. Es haben daher die beiden die Werthe:

$$(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \nu)^2 \text{ resp. } (\iota\ \varkappa\ \lambda\ \rho)^2, \text{ so dass also:}$$

$$(12) \qquad \frac{d^2V}{dv_{\nu\rho} \cdot dv_{\mu\mu}} = \pm\ (\iota\ \varkappa\ \lambda\ \nu)\ (\iota\ \varkappa\ \lambda\ \rho)$$

und zwar gilt das Zeichen $\pm$, je nachdem

$$(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \rho) = \pm\ 1 \text{ ist.}$$

Anders wieder ist die Form der Unterdeterminanten, in denen nur 2 gleiche Zeilen und Colonnen vorkommen. Betrachten wir z. B. die Determinante

$$\begin{vmatrix} v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} \\ v_{23} & v_{24} & v_{25} & v_{26} \\ v_{33} & v_{34} & v_{35} & v_{36} \\ v_{43} & v_{44} & v_{45} & v_{46} \end{vmatrix}$$

so ist dieselbe $= (1\,2\,3\,4)\ (5\,6\,3\,4) - v_{34} \cdot F$ und dies ist auch die allgemeine Form. Es ist nämlich:

$$(13) \qquad \frac{d^2V}{dv_{\lambda\mu} \cdot dv_{\nu\rho}} = (\lambda\ \nu\ \iota\ \varkappa)\ (\mu\ \rho\ \iota\ \varkappa) + v_{\iota\varkappa}\ F,$$

wenn $(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \rho) = +\ 1$.

Auch die Determinanten 3. Grades lassen sich homogen aus den $(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu)$ zusammensetzen. Da sich nun auch F sogar auf 6 Arten als homogene lineare Function der $(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu)$ darstellen lässt, so folgt, dass

$$(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu) = 0 \quad (\iota,\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu = 1\ \ldots\ 6)$$

auch hinreicht, um die Unterdeterminanten bis zum 3. Grade zum Verschwinden zu bringen.

Fassen wir diesen Satz mit dem Vorigen zusammen, so können wir sagen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass 15 Grössen $v_{\iota\varkappa}$ $(\iota < \varkappa;\ \iota, \varkappa = 1\ \ldots\ 6)$ sich

als Coordinaten eines Büschels darstellen lassen, ist das Verschwinden der 15 Grössen ($\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu$).

Diese Gleichungen sind aber weiter Nichts, als die Plücker'schen Relationen für die Büschelcoordinaten zu je 4 genommen. Das Verschwinden derselben ist nothwendig und hinreichend. Dieser Satz gilt übrigens allgemein für beliebiges n und kann dort in denselben 2 Stufen bewiesen werden.

Diese 15 Relationen (11) sind aber nicht unabhängig, sondern es bestehen zwischen den Grössen ($\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu$) folgende Gleichungen.[1])

$$(14)\quad \begin{cases} \text{a)} & F\,.\,\delta_{6\lambda} = v_{1\lambda}(2345) + v_{2\lambda}(3451) + v_{3\lambda}(4512) + v_{4\lambda}(5123) + v_{5\lambda}(1234) \\ \text{b)} & -F\,.\,\delta_{5\lambda} = v_{1\lambda}(2346) + v_{2\lambda}(3461) + v_{3\lambda}(4612) + v_{4\lambda}(6123) + v_{6\lambda}(1234) \\ \text{c)} & +F\,.\,\delta_{4\lambda} = v_{1\lambda}(2356) + v_{2\lambda}(3561) + v_{3\lambda}(5612) + v_{5\lambda}(6123) + v_{6\lambda}(1235) \\ \text{d)} & -F\,.\,\delta_{3\lambda} = v_{1\lambda}(2456) + v_{2\lambda}(4561) + v_{4\lambda}(5612) + v_{5\lambda}(6124) + v_{6\lambda}(1245) \\ \text{e)} & +F\,.\,\delta_{2\lambda} = v_{1\lambda}(3456) + v_{3\lambda}(4561) + v_{4\lambda}(5613) + v_{5\lambda}(6134) + v_{6\lambda}(1345) \\ \text{f)} & -F\,.\,\delta_{1\lambda} = v_{2\lambda}(3456) + v_{3\lambda}(4562) + v_{4\lambda}(5623) + v_{5\lambda}(6234) + v_{6\lambda}(2345) \end{cases}$$

$$\lambda = 1, 2, 3 \ldots 6;\quad \delta_{\iota\lambda} = 0 \text{ für } \iota \gtrless \lambda;\quad \delta_{\iota\iota} = 1.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir an die Lösung unserer Hauptaufgabe für die zweigliedrige Gruppe (n = 6) gehen.

Es ist die Zahl der Lösungen zu bestimmen, welche 8 Gleichungen besitzen von der Form:

$$(15)\quad \begin{cases} \sum_{\iota,\varkappa} a^{\lambda}_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa = 0 \quad (\iota, \varkappa = 1, 2 \ldots 6) \quad \lambda = 1, 2 \ldots 8 \\ a^{\lambda}_{\iota\varkappa} + a^{\lambda}_{\varkappa\iota} = 0. \end{cases}$$

Auch hier schlagen wir denselben Weg ein, wie bei n = 4 und 5. Wir suchen erst die Lösungen der allgemeineren Gleichungen:

$$(16)\qquad \sum_{\substack{\iota,\varkappa \\ \iota<\varkappa}} a^{\lambda}_{\iota\varkappa}\, g_{\iota\varkappa} = 0 \ (\lambda = 1 \ldots 8).$$

Dieselben haben 7 Lösungen und aus denselben $A^1_{\iota\varkappa}$, $A^2_{\iota\varkappa}$ . . . $A^7_{\iota\varkappa}$ müssen sich die gesuchten Büschel com-

[1]) Vergl. Baltzer, Determinanten, S. 47, 5. Aufl.

poniren lassen. Bezeichnen wir die Parameter mit ξ_1, $\xi_2 \ldots \xi_7$ ein, so handelt es sich darum, diese Grössen so zu bestimmen, dass

$$(17) \qquad v_{\iota\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{7} \xi_\lambda \, A^\lambda_{\iota\varkappa} \qquad (\iota, \varkappa)$$

den Gleichungen (11) genügt, d. h. sich als Coordinaten eines Büschels darstellen lässt. Hierbei können wir in den Gleichungen (17) die $A^\lambda_{\iota\varkappa}$ als beliebig, d. h. ohne gegenseitige Beziehungen annehmen, da zu jeder 7gliedrigen Gruppe der $A^\lambda_{\iota\varkappa}$ die 8gliedrige der $a^\lambda_{\iota\varkappa}$, die mit ihnen durch die Gleichungen:

$$\sum_{\iota,\varkappa} a^\lambda_{\iota\varkappa} \, A^\mu_{\iota\varkappa} = 0 \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1 \ldots 8 \\ \mu = 1 \ldots 7 \end{pmatrix}$$

verbunden sind, construirt werden kann und letztere in den Gleichungen (15) ganz allgemein angenommen ist.

Um nun die Untersuchung bequemer weiterführen zu können, wollen wir die ξ_λ als Coordinaten in einem linearen Raume von 6 Dimensionen deuten. Wir bezeichnen jeden in demselben gelegenen Raum durch R^q_p, wo p die Ordnung, q die Dimension ist, so dass also $p \geqq 1$; $q \leqq 6$.

Es bedeutet z. B. R^0_p ein Aggregat von p Punkten. R^1_1 einen Strahl (Gerade). Wir benutzen nun folgende Sätze:

I. Ein R^5_p und ein $R^5_{p^1}$ schneiden sich in einem $R^4_{pp^1}$.

II. Ein R^5_p und ein $R^q_{p^1}$ schneiden sich in einem $R^{q-1}_{pp^1}$.

Der erste ist nur ein specieller Fall des zweiten und folgt leicht, da nur 2 Gleichungen zur Elimination vorhanden sind. Der zweite ist allgemein von Noether[1]) bewiesen worden.

Wir betrachten jetzt die Gleichungen (11) und können nun das vorliegende Problem folgendermaassen aussprechen: Es sollen die Durchschnittspunkte der Flächen $(\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu) = 0$ ihrer Zahl nach bestimmt werden.

---

[1]) Noether, Zur Eliminationstheorie, Math. Ann. Bd. XI S. 571 ff.

Wir betrachten zuerst wieder drei Flächen $(R_2^5)(1\,2\,3\,4) = 0$; $(1\,2\,3\,5) = 0$; $(1\,2\,4\,5) = 0$.

Dieselben schneiden sich in einem R_8^3 und es ist für denselben nach (14a) entweder $(3\,4\,5\,1) = 0$ u. $(2\,3\,4\,5) = 0$

oder (18)
$$\begin{cases} v_{12} = 0;\ v_{13} \cdot v_{42} - v_{14} \cdot v_{32} = 0;\ v_{13} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{32} = 0; \\ v_{14} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{42} = 0. \end{cases}$$

Dies ist für einen R_3^3 der Fall. Denn es schneiden sich $v_{13} \cdot v_{42} - v_{14} \cdot v_{32}$ und $v_{13} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{32} = 0$ in einem R_4^4, von demselben löst sich ab der R_1^4, gegeben durch die Gleichungen $v_{13} = 0$, $v_{23} = 0$. In den übrig bleibenden R_3^4 ist auch, da i. A. nicht, das heisst nur für Räume niederer Dimension $v_{13} = v_{23} = 0$ ist,

$$v_{14} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{42} = 0.$$

Schneiden wir zuletzt diesen R_3^4 durch den R_1^5 $v_{12} = 0$, so ergiebt sich ein R_3^3 für den die Bedingungen (18) erfüllt sind. Folglich sind für einen $R_{8-3}^3 = R_5$ die 5 Grössen:

(19) $(1234) = 0$; $(1235) = 0$; $(1245) = 0$; $(3451) = 0$; $(2345) = 0$.

Dabei ist noch Folgendes zu bemerken:

Die Bedingungen (18) sind für einen R_3^3 erfüllt, es wäre aber möglich, dass ausserhalb desselben noch Räume niederer Dimensionen vorhanden wären,[1]) für die sie ebenfalls erfüllt wären, und da wir den Raum R_3^3 dann noch weiter schneiden werden, so könnten wir dadurch Punkte, welche die Bedingungen (18) erfüllen, ausser Acht lassen, was dann zu falschen Resultaten führen müsste.

Nun schneiden sich die 3 Räume (R_2^5)

$$v_{13} \cdot v_{42} - v_{14} \cdot v_{23} = 0;\ v_{13} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{32} = 0 \text{ und}$$
$$v_{14} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{42} = 0$$

---

[1]) Solche Fälle kommen schon im Raume von 3 Dimensionen vor. Der einfachste dürfte der dreier Kugeln sein. Dieselben schneiden sich im imaginären Kugelkreise und in 2 Punkten im Endlichen, also ausserhalb desselben.

in einem R_3^4, wie wir gesehen. Es könnten aber noch Punkte, die allen dreien gemeinsam sind, ausserhalb der gemeinsamen Curve liegen. Dieselben sind jedenfalls gemeinsame Punkte je zweier der drei Flächen, liegen also auf den 3 Durchschnittsräumen R_4^4 und da dieselben in denselben R_3^4 und in 3 verschiedene R_1^4 nämlich ($v_{13} = v_{23} = 0$) und ($v_{14} = v_{24} = 0$) und ($v_{15} = v_{25} = 0$) zerfallen, so müssten sie auf den letzteren liegen, da sie ja auf R_3^4 nicht liegen sollen, d. h. es wäre für dieselben

$$v_{13} = v_{23} = v_{14} = v_{24} = v_{15} = v_{25} = 0.$$

Dies kann höchstens für einen Punkt der Fall sein, und da wir noch mit $v_{12} = 0$ schneiden, so fällt auch dieser fort, und es genügen nur die Punkte von R_3^3 den Bedingungen (18).

Wir müssen jetzt dieselbe Untersuchung für die Bedingungen (19) und den R_5^3 anstellen. Für die nicht auf R_5^3 gelegenen Punkte, die (19) erfüllen, müsste

$$v_{12} = v_{13} = v_{14} = v_{15} = v_{23} = v_{24} = v_{25} = v_{34} = v_{35} = v_{45} = 0$$

sein, was unmöglich ist. Sollen nämlich für einen Punkt die Bedingungen (19) erfüllt sein, ohne dass er auf R_5^3 liegt, so muss er auf allen sich bei der Combination 3er ergebenden R_3^3 liegen, d. h. es müssten für ihn die Bedingungen (18) und den anderen Gruppirungen der 5 Flächen zu je dreien entsprechende Bedingungen erfüllt sein. Dies kommt darauf hinaus, dass in der schiefen Determinante, die zu v_{66} adjungirt ist, alle Determinanten zweiten Grades $= 0$ sind. Daraus folgt aber das Verschwinden der Determinanten ersten Grades, d. h. der $v_{\iota\varkappa}$ selbst ($\iota, \varkappa = 1 \ldots 5$). Es giebt daher Punkte, die den Bedingungen (19) genügen, nur auf R_5^3.

Diesen Raum schneiden wir durch 2 neue Flächen: $(1\,2\,3\,6) = 0$ und $(1\,2\,4\,6) = 0$ und erhalten so einen R_{20}^1.

Für einen Theil desselben ist auch $(3461) = 0$ u. $(2346) = 0$, während für den anderen nach (14^b) $\lambda = 1, 2$ $v_{12} = 0$ und ausserdem natürlich noch die 7 Flächen $= 0$ zu setzen sind. Also im Ganzen muss sein:

$$(20)\quad \begin{cases} v_{12} = 0;\ v_{13} \cdot v_{42} - v_{14} \cdot v_{32};\ v_{13} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{32} = 0; \\ v_{14} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{42} = 0;\ v_{13} \cdot v_{62} - v_{16} \cdot v_{32} = 0; \\ v_{14} \cdot v_{62} - v_{16} \cdot v_{42} = 0. \end{cases}$$

$$(20^I)\qquad (2345) = 0;\ (3451) = 0.$$

Die ersten 4 Bedingungen stimmen mit den in (18) aufgestellten überein, sind also für einen R_3^3 und nur für diesen erfüllt. Schneide ich denselben mit der Fläche $v_{13} \cdot v_{62} - v_{16} \cdot v_{32} = 0$, so erhalte ich einen R_6^2 und für denselben ist entweder $v_{14} \cdot v_{62} - v_{16} \cdot v_{42} = 0$ oder $v_{13} = 0; v_{23} = 0; v_{12} = 0; v_{14} \cdot v_{52} - v_{15} \cdot v_{42} = 0$. Letzteres ist der Fall für einen R_2^2, folglich ersteres für den übrig bleibenden R_4^2. Für denselben ist aber ausser den Bedingungen (20) auch die Bedingung

$$(20^{II})\qquad v_{15} \cdot v_{62} - v_{16} \cdot v_{52} = 0$$

erfüllt, da sonst nach (20) zugleich $v_{12} = v_{13} = v_{23} = v_{14} = v_{24} = 0$ wäre, was für einen Raum der Dimension 2 nicht erfüllt sein kann.

Andererseits aber muss auch diese Bedingung für den Raum, den wir von dem erhaltenen R_{20}^1 abzutrennen haben, erfüllt sein. Denn aus (14^a) in Gemeinschaft mit (19) folgt $F = 0$; folglich ist für den Raum, der von R_{20}^1 sich ablöst, nach (14^b) $\lambda = 5, 6$ $v_{15} \cdot v_{62} - v_{16} \cdot v_{52} = 0$ erfüllt. Es lässt sich jetzt nach derselben Methode wie früher unschwer zeigen, dass ausser auf dem erhaltenen R_4^2 keine in Betracht kommenden Punkte, die die Bedingungen (20) und (20^{II}) erfüllen, existiren. Denn für solche müsste sein:

$v_{12} = 0;\ v_{13} = v_{23} = v_{14} = v_{24} = 0;\ v_{15} \cdot v_{62} - v_{16} \cdot v_{52} = 0.$

Die hier erhaltenen 2 Punkte fallen aber bereits bei dem nächsten durch (20^I) gegebenen Schnitt heraus.

Wir können daher R_4^2 weiter behandeln und schneiden es zunächst mit $(3\,4\,5\,1) = 0$. Wir erhalten einen R_8^1. Dann ist aber nach (14^a) entweder auch $(2\,3\,4\,5) = 0$ oder $v_{12} = v_{13} = v_{14} = v_{15} = 0$, ausserdem aber auch $v_{16} = 0$, da nach (20) resp. (20^{II}) $v_{16} \cdot v_{23} = v_{16} \cdot v_{24} = v_{16} \cdot v_{25} = 0$. Dies ist für einen R_1^1 der Fall. Es löst sich daher von R_{20} ein $R_{8-1}^1 = R_7^1$ ab, für den (20), (20^I), (20^{II}) erfüllt sind. Es ist daher neben (19) auch

(21) $\quad (1\,2\,3\,6) = (1\,2\,4\,6) = (3\,4\,6\,1) = (2\,3\,4\,6) = 0$

erfüllt für einen $R_{20-7}^1 = R_{13}^1$ und, wie man wieder leicht zeigen kann, nur für diesen.

Schneiden wir endlich diesen R_{13}^1 mit der Fläche

$$(1\,2\,5\,6) = 0,$$

so folgt, dass für die erhaltenen 26 Punkte entweder nach (14^c) $(3\,5\,6\,1) = 0$ und $(2\,3\,5\,6) = 0$ oder ausser den Bedingungen (20), (20^I), (20^{II}) noch

(22) $(2\,3\,4\,6) = 0$ und $(3\,4\,6\,1) = 0$ erfüllt sein müssen.

Die Bedingungen (20), (20^I) und (20^{II}) waren erfüllt für einen R_7^1 und folglich dieselben zusammen mit $(3\,4\,6\,1) = 0$ für 14 Punkte. Nach (14^b) ist aber für dieselben entweder auch $(2\,3\,4\,6) = 0$ oder

$v_{12} = v_{13} = v_{14} = v_{16} = 0 = v_{15} = 0$ und $(2\,3\,4\,5) = 0$.

Dies ist für 2 Punkte der Fall; also giebt es 12 Punkte, für die (20), (20^I), (20^{II}) u. (22) erfüllt sind. Diese sind von den obigen 26 Punkten in Abzug zu bringen, so dass nur 14 übrig bleiben, für die ausser den Bedingungen (19) und (21) auch erfüllt sind:

(23) $\quad (1\,2\,5\,6) = (3\,5\,6\,1) = (2\,3\,5\,6) = 0.$

Dann folgt aber aus (14^d), (14^e), (14^f), dass auch noch die 3 übrigen Grössen:

(24) $\quad (4\,5\,6\,1) = (4\,5\,6\,2) = (4\,5\,6\,3) = 0$ sind,

da hier die aus den anderen Möglichkeiten fliessenden Bedingungen, da ihre Zahl 6 übersteigt, nicht mehr zu erfüllen sind.

Es giebt daher 14 Punkte, d. h. 14 Parametersysteme ξ, für die alle $(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu) = 0$.

Nennen wir wieder die Gesammtheit der Strahlen im Raume von fünf Dimensionen, welche einer linearen Bedingung genügen, einen Complex, so folgt:

8 lineare Strahlencomplexe im fünfdimensionalen Raume haben 14 Strahlen gemein. Oder:

In jeder siebengliedrigen Gruppe von linearen Complexen im fünfdimensionalen Raume giebt es 14 specielle, welche aus der Gesammtheit der Strahlen, die eine dreidimensionale Ebene schneiden, bestehen.

Rein algebraisch können wir sagen:

8 in 2.6 Unbestimmten bilineare Gleichungen mit alternirenden Coëfficienten haben 14 Lösungen.

Statt des Systems der 8 in (15) gegebenen Gleichungen können wir offenbar beliebig 8 andere aus diesen durch unabhängige lineare Zusammensetzung gebildete substituiren. Besonders einfach wird nun die Interpretation, wenn solche genommen werden, für die die Coëfficienten Coordinaten von 2- resp. 4gliedrigen Gruppen sind. Dass dies möglich ist, folgt aus unserem Satze, denn schon in der 7gliedrigen Complexgruppe sind 14 solche specielle vorhanden, folglich in der 8gliedrigen unendlich viele. Haben wir nun so eine Gleichung:

$$\Sigma\, a_{\iota\varkappa}\ x_\iota\ y_\varkappa = 0, \text{ wo also}$$

$a_{\iota\varkappa}$ Coordinaten einer 4gliedrigen Gruppe sind,

$$a_{\iota\varkappa} = \begin{vmatrix} \alpha_\lambda & \alpha_\mu & \alpha_\nu & \alpha_\rho \\ \beta_\lambda & \beta_\mu & \beta_\nu & \beta_\rho \\ \gamma_\lambda & \gamma_\mu & \gamma_\nu & \gamma_\rho \\ \delta_\lambda & \delta_\mu & \delta_\nu & \delta_\rho \end{vmatrix} \qquad (\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \rho) = +\ 1,$$

so wird $\Sigma\, a_{\iota\varkappa}\ x_\iota\ y_\varkappa$ dann und nur dann $= 0$, wenn die 6 Elemente abhängig sind, wenn also die 4gliedrige Gruppe $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ und die 2gliedrige x y ein Element gemein haben.

Unser Satz lässt sich daher so aussprechen:

In einer 5fachen linearen Mannigfaltigkeit giebt es 14 zweigliedrige Gruppen, die mit 8 gegebenen viergliedrigen je ein Element gemein haben.

Wir wollen die Interpretation an elementaren, ebenen und räumlichen Gebilden erst am Schlusse der algebraischen Betrachtungen vornehmen und fügen nur noch die Deutung der Mannigfaltigkeit als ebener fünfdimensionaler Raum hinzu, um eine formelle Uebereinstimmung mit Schubert[1]) zu erlangen. Es heisst dann der Satz:

Es giebt 14 Strahlen, die 8 gegebene 3dimensionale Ebenen schneiden.

Wir wollen hieran, wie bei $n = 5$, die Sätze knüpfen, welche aus den obigen leicht abgeleitet werden können und die allgemeine Fragestellung besitzen:

Wieviel zweigliedrige Gruppen haben mit m dreigliedrigen und $8 - 2m$ viergliedrigen Gruppen je ein Element gemein?

Wir gehen dabei von Folgendem aus.

Gebe ich nur $8 - 2$ e Gleichungen von der Form:

$$(25) \qquad \Sigma\, a^{\lambda}_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa = 0$$

und noch dazu e Paare von Gleichungen:

$$(26) \qquad \Sigma\, a^{\mu}_{\varkappa}\, x_\varkappa = 0,\ \Sigma\, a^{\mu}_{\varkappa}\, y_\varkappa = 0,$$

so lässt sich, wie bereits auf S. 15 bemerkt, die Anzahl der Variabeln um e vermindern. Dieselbe ist daher, wenn $e > 0$, stets < 6, also das Problem auf die Fälle $n = 3, 4, 5$ reducirbar.

Die Zahl der Lösungen der Gleichungen (25) und (26) ist also für $e = 0 : 14$; für $e = 1 : 5$; für $e = 2 : 2$; für $e = 3 : 1$ und für $e = 4$ ebenfalls $= 1$.

Gebe ich nun z. B. nur 6 viergliedrige, aber 1 dreigliedrige Gruppe und suche die Zahl der Büschel, welche mit jeder derselben ein Element gemein haben, so kann man folgendermaassen das Problem auf bereits behandelte Fälle reduciren. Ich ergänze die dreigliedrige Gruppe auf 2 ver-

---

[1]) Die von Schubert l. c. S. 47 gegebene Zahl stimmt für $n = 6$ mit der oben algebraisch abgeleiteten überein.

schiedene Weisen durch Hinzufügung beliebiger Elemente zu viergliedrigen Gruppen. Dann muss jedes Büschel, das mit den beiden entstehenden viergliedrigen ein Element gemein hat, ein solches entweder bereits mit der dreigliedrigen gemein haben oder, wenn dies nicht der Fall, in der durch beide Gruppen bestimmten fünfgliedrigen liegen. Der erste Fall kommt auf den der 8 viergliedrigen Gruppen zurück, der zweite auf das System (25), (26) für $e = 1$. Da beide Zahlen bekannt sind, folgt als Differenz die gesuchte Zahl.

Um die Berechnung dieser Differenzen übersichtlicher zu gestalten, führen wir Symbole ein:

$$(m, n, p),$$

welche die Zahl der Lösungen bedeuten sollen, die mit m dreigliedrigen und n viergliedrigen Gruppen ein Element gemein haben und in p fünfgliedrigen Gruppen liegen.

Da erst 8 Bedingungen das Büschel bestimmen, so muss sein:

$$8 = 2m + n + 2p.$$

Gesucht sind die Symbole für $p = 0$; bekannt diejenigen für $m = 0$.

Zwischen den Symbolen besteht folgende Gleichung: Es seien gegeben m drei-, n vier-, p fünfgliedrige Gruppen. Ich ergänze eine dreigliedrige, wie oben besprochen, zu 2 viergliedrigen. Dann ist:

(m, n, p) = der Differenz der Zahl der Lösungen, wenn die Zahl der dreigliedrigen Gruppen $m - 1$, die der viergliedrigen $n + 2$ ist, vermindert um die Zahl der Lösungen, wenn die Zahl der dreigliedrigen Gruppen um 1 vermindert, die der fünfgliedrigen um 1 vermehrt ist. Also:

$$(27)\quad (m, n, p) = (m - 1, n + 2, p) - (m - 1, n, p + 1).$$

Nun sind für $m = 0$ die Zahlen bereits angegeben und zwar ist:

$$(0, 8, 0) = 14;\ (0, 6, 1) = 5;\ (0, 4, 2) = 2;\ (0, 2, 3) = 1;$$
$$(0, 0, 4) = 1.$$

Aus diesen Symbolen und (27) kann ich die gesuchten $p = 0$ berechnen. Es ist:

$(0, 8, 0) = 14.$ Es ist:

$(1, 6, 0) = (0, 8, 0) - (0, 6, 1) = 14 - 5 = 9.$ Es ist:

$(2, 4, 0) = (1, 6, 0) - (1, 4, 1)$

$(1, 4, 1) = (0, 6, 1) - (0, 4, 2)$

$(2, 4, 0) = (1, 6, 0) - (0, 6, 1) + (0, 4, 2) = 9 - 5 + 2 = 6$

Ferner ist:

$(3, 2, 0) = (2, 4, 0) - (2, 2, 1)$

$-(2, 2, 1) = -(1, 4, 1) + (1, 2, 2)$

$-(1, 4, 1) = -(0, 6, 1) + (0, 4, 2)$

$(1, 2, 2) = (0, 4, 2) - (0, 2, 3)$

$(3, 2, 0) = (2, 4, 0) - (0, 6, 1) + 2 \,.\, (0, 4, 2)$
$- (0, 2, 3) = 6 - 5 + 2 \,.\, 2 - 1 = 4.$

Endlich ist:

$(4, 0, 0) = (3, 2, 0) - (3, 0, 1)$

$-(3, 0, 1) = -(2, 2, 1) + (2, 0, 2)$

$-(2, 2, 1) = -(1, 4, 1) + (1, 2, 2)$

$-(1, 4, 1) = -(0, 6, 1) + (0, 4, 2)$

$(1, 2, 2) = (0, 4, 2) - (0, 2, 3)$

$(2, 0, 2) = (1, 2, 2) - (1, 0, 3)$

$-(1, 0, 3) = -(0, 2, 3) + (0, 0, 4)$

$(4, 0, 0) = (3, 2, 0) - (0, 6, 1) + 3\,(0, 4, 2) - 3\,(0, 2, 3) + (0, 0, 4)$

$(4, 0, 0) = 4 - 5 + 3 \,.\, 2 - 3 \,.\, 1 + 1 = 3.$

Es giebt also 14 zweigliedrige Gruppen, die mit 8 viergliedrigen Gruppen, 9 zweigliedrige, die mit 6 viergliedrigen und 1 dreigliedrigen, 6 zweigliedrige, die mit 4 viergliedrigen und 2 dreigliedrigen, 4 zweigliedrige, die mit 2 viergliedrigen und 3 dreigliedrigen, endlich 3 zweigliedrige, die mit 4 dreigliedrigen Gruppen je ein Element gemein haben.

Da aber die analytische Behandlung einer Gruppe und ihrer conjugirten vollkommen die nämliche ist, so kann ich auch die erhaltenen Resultate für die Construction von viergliedrigen Gruppen aussprechen und zwar folgendermaassen:

Es giebt 14 viergliedrige Gruppen, die mit 8 zweigliedrigen ein Element gemein haben.

Es giebt 9 viergliedrige, die mit 6 zweigliedrigen ein Element, mit 1 dreigliedrigen ein Büschel gemein haben.

Es giebt 6 viergliedrige, die mit 4 zweigliedrigen ein Element, mit 2 dreigliedrigen ein Büschel gemein haben.

Es giebt 4 viergliedrige, die mit 2 zweigliedrigen ein Element, mit 3 dreigliedrigen ein Büschel gemein haben.

Es giebt 3 viergliedrige, die mit 4 dreigliedrigen Gruppen je ein Büschel gemein haben.

Das letzte Resultat hier und das entsprechende oben können natürlich auch viel einfacher erhalten werden.

Es ist aber noch eine dritte, dreifache, Bedingung als Element der Constructionen einzuführen, nämlich die, dass eine zweigliedrige Gruppe mit einer anderen zweigliedrigen ein Element gemein hat. Man kann wieder diese dreifache Bedingung in niedere zerlegen, z. B. in eine zweifache und eine einfache, wie folgt. Wenn das Büschel (x, y) mit (a, b) ein Element gemein hat, so hat es ein solches gemein mit der dreigliedrigen Gruppe (a, b, c) und mit der viergliedrigen (a, b, d, e), wo a, b, c, d, e unabhängig sein sollen. Umgekehrt, wenn (x, y) mit (a, b, c) und (a, b, d, e) ein Element gemein hat, so ist dies entweder ein Element von (a, b) oder aber (x, y) liegt in der fünfgliedrigen Gruppe (a, b, c, d, e) und hat mit einer in derselben Gruppe enthaltenen dreigliedrigen ein Element gemein, nämlich mit (a, b, c). Die erstere Möglichkeit wird hier allein in Betracht gezogen, die zweite führt auf ein analoges, bereits gelöstes Problem von $n = 5$.

Es sei z. B. die Anzahl der Büschel zu berechnen, welche mit einem Büschel und 5 viergliedrigen Gruppen je ein Element gemein hat. Wenden wir die eben gegebene Methode an, so erscheint die gesuchte Anzahl als Differenz zweier anderen, nämlich der Zahl der Büschel, welche mit einer dreigliedrigen und 6 viergliedrigen Gruppen ein Element gemein hat, vermindert um die Zahl der Büschel in einer fünfgliedrigen Gruppe, welche mit fünf dreigliedrigen derselben

ein Element gemein hat. Erstere ist nach S. 35 gleich 9, letztere nach S. 20 gleich 5, also die Zahl der Lösungen unseres Problems $= 9 - 5 = 4$. Nehmen wir jetzt zu derselben Bedingung noch hinzu eine dreigliedrige und 3 viergliedrige oder 2 dreigliedrige und eine 4gliedrige, so steht natürlich nichts im Wege, dieselbe Methode wieder in Anwendung zu bringen. Es lassen sich aber die Probleme unmittelbar auf analoge Fälle für $n = 5$ reduciren. Denn wenn das Büschel mit einer drei- und einer zweigliedrigen Gruppe ein Element gemein hat, so muss es, allgemeine Lage vorausgesetzt, in der durch beide bestimmten 5gliedrigen liegen, so dass jedes der gesuchten Elemente nur noch von 5 Parametern abhängt.

Nehmen wir schliesslich 2 zweigliedrige Gruppen und verlangen ausser 2 anderen Bedingungen, dass das Büschel mit beiden ein Element gemein hat, so muss dasselbe in der von beiden gebildeten viergliedrigen Gruppe liegen, so dass das Problem sich auf 4 Veränderliche reducirt. Man erhält so folgende Resultate:

Es giebt 4, 3, 2 Büschel, welche mit einem Büschel, mit 0, 1, 2 dreigliedrigen und 5, 3, 1 viergliedrigen Gruppen ein Element gemein haben (immer die an gleicher Stelle stehenden Zahlen gehören zusammen).

Es giebt 2, 1 Büschel, welche mit 2 Büscheln, mit 0, 1 dreigliedrigen Gruppen und mit 2, 0 viergliedrigen ein Element gemein haben.

Alle diese Resultate lassen sich auch von viergliedrigen Gruppen aussprechen.

Schliesslich kann man noch als Bedingungen einführen, dass die gesuchte zwei- resp. viergliedrige Gruppe durch gegebene Elemente geht. Da aber die gesuchten Zahlen sich ohne Mühe aus den bereits gegebenen zusammensetzen lassen, so wollen wir davon absehen.

§ 6.

Ein Hilfssatz über specielle Strahlencomplexe des fünfdimensionalen Raumes.

Wir haben bereits auf S. 32 als linearen Strahlencomplex im fünfdimensionalen Raume die Gesammtheit der

Strahlen (x y) bezeichnet, welche der Gleichung genügen:

$$(1) \qquad \sum_{\iota,\,\varkappa = 1 \ldots 6} b_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa = 0; \quad b_{\iota\varkappa} + b_{\varkappa\iota} = 0.$$

Ein specieller Complex ist bereits betrachtet worden. Wenn nämlich die Determinante

$$(2) \qquad | b_{\iota\varkappa} | \quad (\iota, \varkappa = 1 \ldots 6)$$

den Defect 4 hat, so schneiden sämmtliche Geraden des Complexes eine dreidimensionale Ebene, die durch die Punkte $\alpha_\varkappa$ bestimmt ist, für welche

$$\sum_\varkappa \alpha_\varkappa\, b_{\iota\varkappa} = 0 \qquad (\iota = 1 \ldots 6)$$

und umgekehrt jeder Strahl, der dieselbe schneidet, ist ein Complexstrahl.

Es verdient aber noch ein allgemeinerer Complex Beachtung, nämlich der, bei dem allein die Determinante $| b_{\iota\varkappa} |$ und folglich auch ihre ersten Minoren verschwinden. Es haben alsdann die Gleichungen

$$(3) \qquad \sum_\varkappa X_\varkappa\, b_{\iota\varkappa} = 0 \qquad (\iota = 1 \ldots 6)$$

2 Lösungen, etwa $X_\varkappa = \alpha_\varkappa$ und $X_\varkappa = \beta_\varkappa$ und umgekehrt, wenn die Gleichungen (3) eine und daher auch eine zweite Lösung besitzen, so ist die Determinante (2) gleich 0, der Defect derselben = 2. Besitzt dieselbe in der That keinen weiteren Defect, so sind die Grössen:

$$(4) \qquad (\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu) = b_{\iota\varkappa}\, b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda}\, b_{\mu\varkappa} + b_{\iota\mu}\, b_{\varkappa\lambda}$$

nach einem Satz des § 5 nicht sämmtlich gleich 0. Sie bilden also einen zweiten Complex mit der Determinante $| A_{\nu\rho} |$, wo

$$(\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu) = A_{\nu\rho}; \; (\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu\,\rho) = +\,1.$$

Dieselbe muss den Defect 4 haben. Dies kann man z. B. folgendermaassen zeigen. Die $A_{\nu\rho}$ sind nach (14) § 5 durch eine Anzahl Gleichungen verbunden, die sich hier dadurch specialisiren, dass $F = \sqrt{| b_{\iota\varkappa} |} = 0$ ist. Wir sehen dann aus diesen homogenen linearen Gleichungen, dass, wenn in $| b_{\iota\varkappa} |$ die Determinanten 4. Grades nicht sämmtlich

verschwinden, dann in $|\,A_{\nu\rho}\,|$ der Defect $= 4$ ist. Dann folgt aber weiter, dass der Complex $A_{\nu\rho}$ eine zwei- oder viergliedrige Gruppe ist. D. h.

$$(5)\qquad (\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu) = A_{\nu\rho} = \xi_\nu\,\eta_\rho - \xi_\rho\,\eta_\nu \quad \text{oder auch}$$
$$= |\,t_\tau,\ u_\tau,\ v_\tau,\ w_\tau\,| \quad (\tau = \iota,\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu).$$

Ist umgekehrt $(\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu) = A_{\nu\rho} = \xi_\nu\,\eta_\rho - \xi_\rho\,\eta_\nu$, so ist

$$|\,A_{\nu\rho}\,| = |\,b_{\iota\varkappa}\,|^2 = 0. \quad \text{D. h.}$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $|\,b_{\iota\varkappa}\,| = 0$ ist, die, dass die 15 Grössen $(\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu)$ die Form (5) haben. Es kommt jetzt darauf an, die Grössen $\xi,\ \eta$ zu finden.

Nun ist:

$$(6)\qquad \begin{cases} b_{\iota\iota}\cdot b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda}\cdot b_{\mu\iota} + b_{\iota\mu}\cdot b_{\iota\lambda} = 0 \\ b_{\iota\varkappa}\cdot b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda}\cdot b_{\mu\varkappa} + b_{\iota\mu}\cdot b_{\varkappa\lambda} = \xi_\nu\,\eta_\rho - \xi_\rho\,\eta_\nu \\ b_{\iota\lambda}\cdot b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda}\cdot b_{\mu\lambda} + b_{\iota\mu}\cdot b_{\lambda\lambda} = 0 \\ b_{\iota\mu}\cdot b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda}\cdot b_{\mu\mu} + b_{\iota\mu}\cdot b_{\mu\lambda} = 0 \\ b_{\iota\nu}\cdot b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda}\cdot b_{\mu\nu} + b_{\iota\mu}\cdot b_{\nu\lambda} = \xi_\rho\,\eta_\varkappa - \xi_\varkappa\,\eta_\rho \\ b_{\iota\rho}\cdot b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda}\cdot b_{\mu\rho} + b_{\iota\mu}\cdot b_{\rho\lambda} = \xi_\varkappa\,\eta_\nu - \xi_\nu\,\eta_\varkappa \end{cases}$$

wofern $(\iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \rho) = +1$.

Multipliciren wir die Gleichungen (6) bezüglich mit $\alpha_\iota,\ \alpha_\varkappa,\ \alpha_\lambda,\ \alpha_\mu,\ \alpha_\nu,\ \alpha_\rho$ und beachten, dass

$$\sum_\varkappa \alpha_\varkappa\ b_{\iota\varkappa} = 0 \quad (\iota = 1\ \ldots\ 6)$$

so folgt:

$$0 = \begin{vmatrix} \xi_\varkappa & \xi_\nu & \xi_\rho \\ \eta_\varkappa & \eta_\nu & \eta_\rho \\ \alpha_\varkappa & \alpha_\nu & \alpha_\rho \end{vmatrix} \quad \text{für } (\varkappa,\ \nu,\ \rho = 1\ \ldots\ 6),$$

folglich: $\alpha_\varkappa = p\xi_\varkappa + q\eta_\varkappa$, aber ebenso

$$\beta_\varkappa = p^1\xi_\varkappa + q^1\eta_\varkappa$$

ferner $pq^1 - p^1q \neq 0$, da sonst α u. β dieselben Lösungen wären; es ist daher:

$$\Sigma\,\xi_\varkappa\,b_{\iota\varkappa} = 0 \text{ und } \Sigma\,\eta_\varkappa\,b_{\iota\varkappa} = 0, \quad \text{d. h.}$$

Wenn $|b_{\iota\varkappa}| = 0$, so lässt sich $(\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu)$ in die Form bringen:

$$(7)\quad (\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu) = A(\alpha_\nu\,\beta_\rho - \alpha_\rho\,\beta_\nu),$$

wo A eine Constante und α und β beliebige aber verschiedene Lösungen von (3) sind.

§ 7.

Die dreigliedrige Gruppe. Die Problemstellung.

Die dreigliedrige Gruppe hat nach § 1 $\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} = 20$ Coordinaten und nur $3\,.\,3 = 9$ Constante. Eine lineare Gleichung zwischen den 20 Coordinaten kann in der Form geschrieben werden:

$$(1)\quad \sum_{\iota,\,\varkappa,\,\lambda = 1\,\ldots\,6} a_{\iota\varkappa\lambda}\; x_\iota\; y_\varkappa\; z_\lambda = 0$$

wo $a_{\iota\varkappa\lambda}$ durch eine Vertauschung zweier Indices ins Negative übergeht, also:

$$(2)\quad a_{\iota\varkappa\lambda} = -\,a_{\varkappa\iota\lambda} = -\,a_{\iota\lambda\varkappa} = -\,-$$

Man kann aber noch andere Gleichungsformen in Betracht ziehen, die nicht x y z gleichzeitig enthalten.

Auch die Gleichungen:

$$(3)\quad \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa = 0;\ \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, y_\iota\, z_\varkappa = 0;\ \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, z_\iota\, x_\varkappa = 0$$

ergeben Gleichungen für die dreigliedrige Gruppe; nämlich für jedes Büschel derselben, da sich jedes Büschel aus dreien linear zusammensetzt. Diese Bedingungen (3) zählen im Allgemeinen dreifach und können auf folgende Weise durch 3 Gleichungen der Form (1) ersetzt werden. Es seien μ, ν, ρ 3 Indices von der Beschaffenheit, dass $|x_\tau, y_\tau, z_\tau|$ $(\tau = \mu, \nu, \rho)$ nicht gleich 0.

Dann ist das System (3) aequivalent den 3 Gleichungen:

$$z_\mu \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa + x_\mu \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, y_\iota\, z_\varkappa + y_\mu \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, z_\iota\, x_\varkappa = 0$$
$$z_\nu \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa + x_\nu \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, y_\iota\, z_\varkappa + y_\nu \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, z_\iota\, x_\varkappa = 0$$
$$z_\rho \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, x_\iota\, y_\varkappa + x_\rho \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, y_\iota\, z_\varkappa + y_\rho \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, z_\iota\, x_\varkappa = 0,$$

welche die Form (1) haben mit der Specialität, dass nur die Determinanten, welche die Indices μ resp. ν resp. ρ enthalten, linear verknüpft sind.

Es kann jedoch vorkommen, dass die Gleichungen (3) nur 2 Bedingungen repräsentiren, also abhängig sind.

Multipliciren wir nämlich dieselben bezüglich mit $\sum_{\lambda} a_{\mu\lambda} z_\lambda$; $\sum_{\lambda} a_{\mu\lambda} x_\lambda$ und $\sum a_{\mu\lambda} y_\lambda$ und addiren, so ergiebt sich:

$$\sum_{\iota, \varkappa, \lambda} x_\iota y_\varkappa z_\lambda (a_{\iota\varkappa} \cdot a_{\mu\lambda} + a_{\iota\mu} \cdot a_{\lambda\varkappa} + a_{\iota\lambda} \cdot a_{\varkappa\mu}) \text{ und}$$

dieses ist identisch $= 0$, sofern $\sum a_{\iota\varkappa} x_\iota y_\varkappa$ eine viergliedrige Gruppe darstellt. Es bedeuten dann wirklich die Gleichungen (3) nur die Bedingung, dass die dreigliedrige Gruppe (x, y, z) mit der viergliedrigen ein Büschel gemein hat, also eine zweifache Bedingung.

Endlich giebt es lineare Gleichungen, die x, y, z getrennt enthalten, nämlich:

(4) $\quad \sum a_\varkappa x_\varkappa = 0, \ \sum a_\varkappa y_\varkappa = 0, \ \sum a_\varkappa z_\varkappa = 0.$

Auch diese Gleichungen führen auf eine gleiche Art auf 3 Gleichungen der Form (1) nebst einigen Ungleichungen, können aber einfacher dadurch erledigt werden, dass man die fünfgliedrige Gruppe $\sum a_\varkappa x_\varkappa = 0$ als Operationsbasis wählt und so das Problem auf $n = 5$ reducirt. Hier ist die dreigliedrige Gruppe analog der zweigliedrigen und beide haben nur 6 Constante. Die Gleichungen (4) gelten daher als $9 - 6 = 3$ Bedingungen.

Das Hauptproblem besteht also auch hier in der Lösung von 9 Gleichungen der Form (1). Haben wir die bei den Büscheln auftretenden linearen Gleichungen als Strahlencomplexe bezeichnet, so ist hier analog die Gesammtheit der Ebenen eines fünfdimensionalen Raumes, welche der Gleichung (1) genügen, als linearer Ebenencomplex zu bezeichnen. Der Fall $n = 6$ ist der erste, welcher solche Gebilde aufweist und deshalb wollen wir zunächst den linearen Ebenencomplex etwas näher untersuchen.

§ 8.

Der lineare Ebenencomplex und seine speciellen Fälle.

Ein linearer Ebenencomplex sei durch die Gleichung

(1) $\quad \sum_{\iota, \varkappa, \lambda} a_{\iota\varkappa\lambda} x_\iota y_\varkappa z_\lambda = 0$ gegeben, worin also

(2) $\quad a_{\iota\varkappa\lambda} = - a_{\varkappa\iota\lambda} = - a_{\iota\lambda\varkappa} = \ldots \quad (\iota, \varkappa, \lambda = 1 \ldots 6).$

Es gehen durch einen Punkt x die Ebenen nach den Strahlen eines linearen Complexes $b_{\varkappa\lambda}$, wo

$$(3) \qquad b_{\varkappa\lambda} = \sum_{\iota} a_{\iota\varkappa\lambda}\ x_{\iota}.$$

Dieser Complex hat eine verschwindende Determinante. Denn es ist:

$$(4) \qquad \sum_{\varkappa} b_{\varkappa\lambda}\ x_{\varkappa} = 0.$$

Deshalb haben die Gleichungen

$$(5) \qquad \sum_{\varkappa} b_{\varkappa\lambda}\ X_{\varkappa} = 0$$

noch eine zweite Lösung: $X_{\varkappa} = y_{\varkappa}$. Unsere erste Aufgabe wird die sein, diese zweite Lösung zu berechnen. Die Methode entnehmen wir dem Hilfssatz, der in § 6 über Complexe mit verschwindender Determinante aufgestellt ist. Danach ist:

$$(6) \quad b_{\iota\varkappa}\cdot b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda}\, b_{\mu\varkappa} + b_{\iota\mu}\, b_{\varkappa\lambda} = x_{\nu}\, y_{\rho} - x_{\rho}\, y_{\nu}, \text{ wo } (\iota\varkappa\lambda\mu\nu\rho) = +1.$$

Wir haben also nur nöthig, die Ausdrücke (6) zu bilden, um dann y_{ρ} unmittelbar ablesen zu können.

Bevor wir aber dazu übergehen, müssen wir eine Reihe von Hilfsgrössen einführen.

Halten wir einen Index, etwa ι, fest und betrachten das zum Index ι gehörige Gleichungssystem:

$$(7) \qquad \sum_{\varkappa} a_{\iota\varkappa\lambda}\ \xi^{\iota}_{\varkappa} = 0 \quad (\lambda = 1 \ldots 6),$$

so sehen wir, dass dasselbe in Wirklichkeit nur 5 Gleichungen mit ebensoviel Unbestimmten enthält. Da nun die Determinante als schiefe Determinante von ungeradem Grade $= 0$ ist, so ergiebt sich eine und i. A. nur eine Lösung. Wir bezeichnen dieselbe mit

$$\xi^{\iota}_{\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots 6 \text{ excl. } \iota).$$

ξ^{ι}_{ι} ist noch nicht definirt; wir werden es später zweckmässig bestimmen. Auch die $\xi^{\iota}_{\varkappa}$ sind noch nicht völlig bestimmt. Wir setzen sie nach bekannten Eigenschaften der schiefen Determinanten:

$$(8) \qquad \xi^{\iota}_{\varkappa} = a_{\iota\lambda\mu}\cdot a_{\iota\nu\rho} + a_{\iota\lambda\nu}\cdot a_{\iota\rho\mu} + a_{\iota\lambda\rho}\cdot a_{\iota\mu\nu},$$

wobei zu beachten, dass $(\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu\,\rho) = +1$.

Jetzt können wir die oben erwähnte Methode in Anwendung bringen. Wir bilden:

$$b_{\iota\varkappa} \cdot b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda} \cdot b_{\mu\varkappa} + b_{\iota\mu} \cdot b_{\varkappa\lambda},$$

$b_{\iota\varkappa}$ ist eine lineare Function der x, die x_ι und $x_\varkappa$ nicht enthält. Es wird also der Ausdruck eine homogene Function des 2. Grades, und zwar treten die Producte $x_\alpha \cdot x_\beta$, wo α und β der Reihe $\iota, \varkappa, \lambda, \mu$ entnommen sind, nicht auf. Zunächst treten die Quadrate überhaupt nicht auf, aber auch die Producte heben sich auf. Denn es ist z. B. $x_\iota\, x_\varkappa$ multiplicirt in $a_{\varkappa\iota\lambda} \cdot a_{\iota\mu\varkappa} + a_{\varkappa\iota\mu} \cdot a_{\iota\varkappa\lambda} = 0$.

Es treten also nur auf $x_\alpha\, x_\nu$ und $x_\alpha\, x_\rho$ für $\alpha = 1, 2 \ldots 6$. So ist $x_\iota\, x_\rho$ multiplicirt in:

$$a_{\rho\iota\varkappa} \cdot a_{\iota\lambda\mu} + a_{\rho\iota\lambda} \cdot a_{\iota\mu\varkappa} + a_{\rho\iota\mu} \cdot a_{\iota\varkappa\lambda} =$$

$$a_{\iota\varkappa\rho} \cdot a_{\iota\lambda\mu} + a_{\iota\lambda\rho} \cdot a_{\iota\mu\varkappa} + a_{\iota\mu\rho} \cdot a_{\iota\varkappa\lambda} = -\,\xi_\nu^\iota \text{ nach (8), da}$$

$(\iota\, \nu\, \varkappa\, \rho\, \lambda\, \mu) = -1$.

Allgemein hat also $x_\alpha\, x_\rho$ den Coëfficienten $-\,\xi_\nu^\alpha$ und ebenso $x_\alpha \cdot x_\nu$ den Coëfficienten ξ_ρ^α für $\alpha \neq \nu, \rho$. Dagegen hat x_ν^2 den Coëfficienten $a_{\nu\iota\varkappa} \cdot a_{\nu\lambda\mu} + a_{\nu\iota\lambda} \cdot a_{\nu\mu\varkappa} + a_{\nu\iota\mu} \cdot a_{\nu\varkappa\lambda} = \xi_\rho^\nu$ und analog x_ρ^2 den Coëfficienten $-\,\xi_\nu^\rho$.

Endlich ist der Coëfficient von $x_\nu \cdot x_\rho$

$$(9)\quad a_{\nu\iota\varkappa} \cdot a_{\rho\lambda\mu} + a_{\nu\iota\lambda} \cdot a_{\rho\mu\varkappa} + a_{\nu\iota\mu} \cdot a_{\rho\varkappa\lambda} + a_{\nu\varkappa\lambda} \cdot a_{\rho\iota\mu} + a_{\nu\varkappa\mu} \cdot a_{\rho\lambda\iota} + a_{\nu\lambda\mu} \cdot a_{\rho\iota\varkappa}.$$

Wir bezeichnen denselben zunächst durch $(\iota\, \varkappa\, \lambda\, \mu)_{\nu\rho}$.

Dann ist: $b_{\iota\varkappa}\, b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda} \cdot b_{\mu\varkappa} + b_{\iota\mu} \cdot b_{\varkappa\lambda} =$

$$x_\nu \left(x_\iota\, \xi_\rho^\iota + x_\varkappa\, \xi_\rho^\varkappa + x_\lambda\, \xi_\rho^\lambda + x_\mu\, \xi_\rho^\mu + x_\nu\, \xi_\rho^\nu \right)$$

$$- x_\rho \left(x_\iota\, \xi_\nu^\iota + x_\varkappa\, \xi_\nu^\varkappa + x_\lambda\, \xi_\nu^\lambda + x_\mu\, \xi_\nu^\mu + x_\rho\, \xi_\nu^\rho \right)$$

$$+ x_\nu \cdot x_\rho\, (\iota\varkappa\lambda\mu)_{\nu\rho}.$$

Man kann aber diesem Ausdrucke dadurch eine symmetrischere Form geben, dass man setzt:

$$(10)\qquad (\iota\, \varkappa\, \lambda\, \mu)_{\nu\rho} = \xi_\rho^\rho - \xi_\nu^\nu.$$

Bei der Bildung der Ausdrücke (9) u. (10) ist zu beachten, dass $(\nu\rho\iota\varkappa\lambda\mu) = +1$ sein muss. Damit aber der Ausdruck (9) die Form (10) erhalten darf, ist nothwendig, dass

$$(\iota\varkappa\lambda\mu)_{\nu\rho} + (\iota\varkappa\lambda\rho)_{\mu\nu} + (\iota\varkappa\lambda\nu)_{\rho\mu} = 0 \text{ ist, weil ja}$$

$$\left(\xi_\rho^\rho - \xi_\nu^\nu\right) + \left(\xi_\nu^\nu - \xi_\mu^\mu\right) + \left(\xi_\mu^\mu - \xi_\rho^\rho\right) = 0.$$

Dies ist aber wirklich der Fall, wie die Addition ergiebt.

Bei Einführung der Ausdrücke (10) wird nun:

$$b_{\iota\varkappa}\, b_{\lambda\mu} + b_{\iota\lambda} \cdot b_{\mu\varkappa} + b_{\iota\mu} \cdot b_{\varkappa\lambda} = x_\nu \sum_{\tau=1}^{6} x_\tau\, \xi_\rho^\tau - x_\rho \sum_{\tau=1}^{6} x_\tau\, \xi_\nu^\tau.$$

Da aber nach (6) der Ausdruck auch $= x_\nu\, y_\rho - x_\rho\, y_\nu$, so folgt, dass wir für y_ρ setzen können:

$$(11) \qquad y_\rho = \sum_{\tau=1}^{6} x_\tau\, \xi_\rho^\tau.$$

Nun sind allerdings die ξ_ν^ν nicht völlig bestimmt, daher auch y_ρ nicht, allein dies ist selbstverständlich, da ja y_ρ auch nach seiner Definition (5) nur bis auf Multipla von x_ρ bestimmt ist. Wir wollen aber jetzt ξ_ν^ν und damit auch y_ρ festlegen dadurch, dass wir auch die Summe $\xi_\nu^\nu + \xi_\rho^\rho$ geben durch die Gleichung:

$$(12) \quad -\xi_\nu^\nu - \xi_\rho^\rho = a_{\nu\rho\iota} \cdot a_{\varkappa\lambda\mu} + a_{\nu\rho\varkappa} \cdot a_{\iota\mu\lambda} + a_{\nu\rho\lambda} \cdot a_{\iota\varkappa\mu} + a_{\nu\rho\mu} \cdot a_{\iota\lambda\varkappa}.$$

Das Bildungsgesetz ist klar, es muss sein:

$$(\nu\rho\iota\varkappa\lambda\mu) = (\nu\rho\varkappa\iota\mu\lambda) = (\nu\rho\lambda\iota\varkappa\mu) = (\nu\rho\mu\iota\lambda\varkappa) = +1.$$

Wir haben aber erst nachzuweisen, dass die in (12) rechts auftretenden Ausdrücke in dieser Weise definirt werden können. Sie seien deshalb zunächst vorübergehend mit $A_{\nu\rho}$ bezeichnet. Dann ist zunächst: $A_{\nu\rho} = A_{\rho\nu}$, weil der Ausdruck in ν und ρ symmetrisch, denn auch $(\rho\nu\iota\varkappa\mu\lambda) = +1$. Aber ferner ist:

$$A_{\mu\rho} = a_{\mu\rho\iota} \cdot a_{\varkappa\nu\lambda} + a_{\mu\rho\varkappa} \cdot a_{\iota\lambda\nu} + a_{\mu\rho\nu} \cdot a_{\iota\varkappa\lambda} + a_{\mu\rho\lambda} \cdot a_{\iota\nu\varkappa}$$

also ist $A_{\mu\rho} - A_{\nu\rho} = (\iota\varkappa\lambda\mu)_{\nu\rho} = \xi_\nu^\nu - \xi_\mu^\mu$ nach (10).

Daraus folgt, dass wir $A_{\nu\rho}$, wie in (12) geschehen, schreiben dürfen. Damit sind alle $\xi_\iota^\varkappa$ definirt.

Es wird sich im Folgenden zeigen, dass die Werthe so gewählt sind, dass alle Formeln sich überaus einfach und elegant schreiben. Man kann überhaupt sagen, dass die $\xi_\iota^\varkappa$ hier etwa dieselbe Rolle, wie bei den Grössen mit 2 Indices die Determinanten bezw. Unterdeterminanten spielen. Es ist zunächst nach (8)

$$\begin{array}{l|l}
\xi_\varkappa^\mu = a_{\mu\iota\lambda} \cdot a_{\mu\nu\rho} + a_{\mu\iota\nu} \cdot a_{\mu\rho\lambda} + a_{\mu\iota\rho} \cdot a_{\mu\lambda\nu} & a_{\iota\nu\rho} \\
\xi_\varkappa^\rho = a_{\rho\iota\lambda} \cdot a_{\rho\mu\nu} + a_{\rho\iota\mu} \cdot a_{\rho\nu\lambda} + a_{\rho\iota\nu} \cdot a_{\rho\lambda\mu} & a_{\iota\mu\nu} \\
\xi_\varkappa^\nu = a_{\nu\iota\lambda} \cdot a_{\nu\rho\mu} + a_{\nu\iota\rho} \cdot a_{\nu\mu\lambda} + a_{\nu\iota\mu} \cdot a_{\nu\lambda\rho} & a_{\iota\rho\mu} \\
\xi_\varkappa^\iota = a_{\iota\lambda\mu} \cdot a_{\iota\nu\rho} + a_{\iota\lambda\nu} \cdot a_{\iota\rho\mu} + a_{\iota\lambda\rho} \cdot a_{\iota\mu\nu} & a_{\mu\rho\nu}
\end{array}$$

Wir multipliciren die erste Gleichung mit $a_{\iota\nu\rho}$, die zweite mit $a_{\iota\mu\nu}$, die dritte mit $a_{\iota\rho\mu}$, die vierte mit $a_{\mu\rho\nu}$, so ergiebt sich:

$$(13) \qquad a_{\mu\rho\nu}\, \xi_\varkappa^\iota + a_{\iota\nu\rho}\, \xi_\varkappa^\mu + a_{\iota\mu\nu}\, \xi_\varkappa^\rho + a_{\iota\rho\mu}\, \xi_\varkappa^\nu = 0.$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung besser übersehen zu können, führen wir neue 20 Grössen ein:

$$(14) \qquad \alpha_{\iota\varkappa\lambda} = a_{\mu\nu\rho} \qquad (\iota\, \varkappa\, \lambda\, \mu\, \nu\, \rho) = +1.$$

Nun gilt die Gleichung (13) stets für 5 verschiedene Indices $\iota, \varkappa, \mu, \nu, \rho$, also schreibt sie sich nach (14) in der Form:

$$(15) \qquad \sum_\tau \alpha_{\lambda\varkappa\tau}\, \xi_\varkappa^\tau = 0.$$

Dieselben sind den Gleichungen (7) für $a_{\iota\varkappa\lambda}$ analog, d. h. die $\xi_\varkappa^\tau$ ($\tau = \iota, \lambda, \mu, \nu, \rho$) sind das zum Index $\varkappa$ gehörige Lösungssystem für den Complex α. Es könnte höchstens noch ein allen gemeinsamer Factor davor treten. Aber man kann sich durch eine Eintragung der $\alpha_{\iota\varkappa\lambda}$ nachträglich leicht überzeugen, dass dem bis auf das Zeichen nicht so ist.

Was die in (10) und (12) definirten Grössen anlangt, so sieht man, dass jedes der darin auftretenden Producte das Zeichen ändert. Es folgt daraus:

Die beiden durch die Gleichung (14) verknüpften Ebenencomplexe stehen in der Beziehung, dass man aus dem zu dem einen gehörigen Tableau $\left| \xi_\iota^\varkappa \right|$ das dem andern zuge-

hörige erhält, indem man alle Elemente mit negativem Zeichen versieht und dann Zeilen und Colonnen vertauscht.

Man kann 2 solche Complexe conjugirt nennen, denn für den speciellen Fall, dass $a_{\iota\varkappa\lambda}$ eine dreigliedrige Gruppe darstellt, ist, wie wir noch genauer sehen werden, $\alpha_{\iota\varkappa\lambda}$ die zu ihr im gewöhnlichen Sinne conjugirte.

Nehme ich zu der Gleichung (13) hinzu die analogen:

$$\begin{array}{lll} (13^{\mathrm{I}}) & a_{\lambda\nu\rho}\,\xi^{\iota}_{\varkappa} + a_{\iota\rho\nu}\,\xi^{\lambda}_{\varkappa} + a_{\iota\nu\lambda}\,\xi^{\rho}_{\varkappa} + a_{\iota\lambda\rho}\,\xi^{\nu}_{\varkappa} = 0 & | \quad a_{\iota\varkappa\mu} \\ (13^{\mathrm{II}}) & a_{\lambda\mu\nu}\,\xi^{\iota}_{\varkappa} + a_{\iota\nu\mu}\,\xi^{\lambda}_{\varkappa} + a_{\iota\lambda\nu}\,\xi^{\mu}_{\varkappa} + a_{\iota\mu\lambda}\,\xi^{\nu}_{\varkappa} = 0 & | \quad a_{\iota\varkappa\rho} \\ (13^{\mathrm{III}}) & a_{\lambda\rho\mu}\,\xi^{\iota}_{\varkappa} + a_{\iota\mu\rho}\,\xi^{\lambda}_{\varkappa} + a_{\iota\rho\lambda}\,\xi^{\mu}_{\varkappa} + a_{\iota\lambda\mu}\,\xi^{\rho}_{\varkappa} = 0 & | \quad a_{\iota\varkappa\nu}. \end{array}$$

Multipliciren wir (13) mit $a_{\iota\varkappa\lambda}$, (13^{I}) mit $a_{\iota\varkappa\mu}$, (13^{II}) mit $a_{\iota\varkappa\rho}$, und (13^{III}) mit $a_{\iota\varkappa\nu}$, so ergiebt sich:

$$\xi^{\iota}_{\varkappa}\left(\xi^{\iota}_{\iota} + \xi^{\varkappa}_{\varkappa}\right) + \xi^{\lambda}_{\varkappa}\cdot\xi^{\iota}_{\lambda} + \xi^{\mu}_{\varkappa}\cdot\xi^{\iota}_{\mu} + \xi^{\nu}_{\varkappa}\cdot\xi^{\iota}_{\nu} + \xi^{\rho}_{\varkappa}\cdot\xi^{\iota}_{\rho}. \quad \text{D. h.}$$

$$(16) \qquad \sum_{1}^{6}{}_{\tau}\,\xi^{\tau}_{\varkappa}\,\xi^{\iota}_{\tau} = 0 \qquad \iota \neq \varkappa.$$

Eine andere interessante Relation ist folgende:

Es ist nach der Definition sowohl $\sum\limits_{\tau} a_{\iota\varkappa\tau}\,\xi^{\iota}_{\tau} = 0$ als auch $\sum\limits_{\tau} a_{\iota\varkappa\tau}\,\xi^{\varkappa}_{\tau} = 0$.

In beiden kommt kein ξ mit 2 gleichen Indices vor. Bilden wir dagegen:

$\Sigma\, a_{\iota\varkappa\tau}\,\xi^{\lambda}_{\tau}$, so kommt hierin ξ^{λ}_{λ} vor.

Wir wollen diesen Werth berechnen. Es seien wieder $\iota, \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \rho$ die 6 Indices in beliebiger aber positiver Reihenfolge, dann ist: $\sum\limits_{\tau} a_{\iota\varkappa\tau}\,\xi^{\lambda}_{\tau}$

$= a_{\iota\varkappa\lambda}\,\xi^{\lambda}_{\lambda} + a_{\iota\varkappa\mu}\,\xi^{\lambda}_{\mu} + a_{\iota\varkappa\nu}\,\xi^{\lambda}_{\nu} + a_{\iota\varkappa\rho}\,\xi^{\lambda}_{\rho}$ und $\Sigma\, a_{\lambda\iota\tau}\,\xi^{\varkappa}_{\tau}$

$= a_{\lambda\iota\varkappa}\,\xi^{\varkappa}_{\varkappa} + a_{\lambda\iota\mu}\,\xi^{\varkappa}_{\mu} + a_{\lambda\iota\nu}\,\xi^{\varkappa}_{\nu} + a_{\lambda\iota\rho}\,\xi^{\varkappa}_{\rho}$, folglich beider Differenz $= a_{\iota\varkappa\lambda}\left(\xi^{\lambda}_{\lambda} - \xi^{\varkappa}_{\varkappa}\right) + a_{\iota\varkappa\mu}\,\xi^{\lambda}_{\mu} - a_{\lambda\iota\mu}\,\xi^{\varkappa}_{\mu} +$

$+ a_{\iota\varkappa\nu}\,\xi^{\lambda}_{\nu} - a_{\lambda\iota\nu}\,\xi^{\varkappa}_{\nu} + a_{\iota\varkappa\rho}\,\xi^{\lambda}_{\rho} - a_{\lambda\iota\rho}\,\xi^{\varkappa}_{\rho}.$

Setzt man hierin die Ausdrücke für die ξ nach (8) und (9) ein, so ergiebt sich als Summe 0; es ist also:

$$(17) \qquad \Sigma\, a_{\iota\varkappa\tau}\, \xi_\tau^\lambda = \Sigma\, a_{\lambda\iota\tau}\, \xi_\tau^\varkappa = \Sigma\, a_{\varkappa\lambda\tau}\, \xi_\tau^\iota.$$

Nun ist $\Sigma\, a_{\iota\varkappa\tau}\, \xi_\tau^\lambda = -\Sigma\, a_{\varkappa\iota\tau}\, \xi_\tau^\lambda = -\Sigma\, a_{\iota\lambda\tau}\, \xi_\tau^\varkappa = \ldots$

Setzen wir also:

$$(18) \qquad \Sigma\, a_{\iota\varkappa\tau}\, \xi_\tau^\lambda = A_{\iota\varkappa\lambda},$$

so ist $A_{\iota\varkappa\lambda}$ ein neuer Ebenencomplex, denn

$$A_{\iota\varkappa\lambda} = -A_{\varkappa\iota\lambda} = -A_{\iota\lambda\varkappa} = \ldots$$

Ferner ist: $\sum_{\lambda=1}^{6} A_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\alpha = \sum_\tau a_{\iota\varkappa\tau} \sum_\lambda \xi_\tau^\lambda\, \xi_\lambda^\alpha$, also nach (16)

$$= a_{\iota\varkappa\alpha} \sum_\lambda \xi_\alpha^\lambda\, \xi_\lambda^\alpha \text{ aber auch } =$$

$$\sum_{\lambda,\tau} a_{\lambda\iota\tau}\, \xi_\tau^\varkappa\, \xi_\lambda^\alpha = \sum_{\lambda,\tau} a_{\iota\tau\lambda}\, \xi_\lambda^\alpha\, \xi_\tau^\varkappa = \sum_{\lambda,\tau} a_{\alpha\iota\lambda}\, \xi_\lambda^\tau\, \xi_\tau^\varkappa = a_{\alpha\iota\varkappa} \Sigma\, \xi_\varkappa^\tau\, \xi_\tau^\varkappa,$$

d. h. es ist:

$$(19) \qquad \Sigma\, \xi_\iota^\tau\, \xi_\tau^\iota = \Sigma\, \xi_\tau^\varkappa\, \xi_\varkappa^\tau = \Delta \text{ für jedes } \iota \text{ und } \varkappa.$$

Die Formeln, denen die $\xi_\iota^\varkappa$ genügen müssen, nämlich (16) und (19) sind vollkommen analog den Bedingungsgleichungen für die Coëfficienten einer Substitution, welche nach zweimaliger Anwendung alles ungeändert lässt. Diese Eigenschaft hat aber auch die Substitution mit den Coëfficienten $\xi_\iota^\varkappa$. Denn aus (11) folgt:

$$y_\rho = \Sigma\, x_\tau\, \xi_\rho^\tau \text{ und}$$

$$\sum_\rho y_\rho\, \xi_\alpha^\rho = \sum_\tau x_\tau \sum_\rho \xi_\rho^\tau\, \xi_\alpha^\rho = \Delta \,.\, x_\alpha.$$

Auch die $a_{\iota\varkappa\lambda}$ werden nach 2maliger Transformation bis auf den Factor Δ wieder in sich selber übergeführt; denn $\Sigma\, a_{\iota\varkappa\tau}\, \xi_\tau^\lambda = A_{\iota\varkappa\lambda}$ und $\Sigma\, A_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\alpha = a_{\iota\varkappa\alpha} \,.\, \Delta$.

Es ist also, wenn wir speciell $\alpha = \iota$, $\varkappa$ setzen:

$$(20) \qquad \begin{cases} \Sigma\, A_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\iota = \Sigma\, A_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\varkappa = 0 \text{ und allgemein} \\ \Sigma\, A_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\alpha = \Delta \,.\, a_{\iota\varkappa\alpha}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen folgt, dass das Tableau der $\xi_\iota^\varkappa$ für den Complex $A_{\iota\varkappa\lambda}$ sich von dem für den ursprünglichen $a_{\iota\varkappa\lambda}$ nur durch gliedweise Multiplication mit einem und demselben Factor und zwar mit Δ unterscheidet. Ebenso können wir aber aus den durch (14) definirten $\alpha_{\iota\varkappa\lambda}$ die $A^1{}_{\iota\varkappa\lambda}$ bilden und zwar muss analog gesetzt werden:

$$A^1{}_{\iota\varkappa\lambda} = -\Sigma\, \alpha_{\iota\varkappa\tau}\, \xi_\lambda^\tau,$$

weil die $\left(-\xi_\lambda^\tau\right)$ die zu α gehörigen Grössen sind. Dann sieht man aber leicht, dass wieder:

$$A^1{}_{\iota\varkappa\lambda} = A_{\mu\nu\rho} \text{ für } (\iota\,\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu\,\rho) = +1.$$

Die Determinante $\left|\, \xi_\varkappa^\lambda \,\right|$ ist leicht zu berechnen,

$$\left|\, \xi_\varkappa^\lambda \,\right| . \left|\, \xi_\lambda^\varkappa \,\right| = \Delta^6, \text{ also:}$$

$$(21) \qquad \left|\, \xi_\varkappa^\lambda \,\right| = \Delta^3.$$

Nun können wir nach den Werthen x_ι fragen, für welche der zugehörige Complex $b_{\varkappa\lambda}$ ein Büschel ist. Dazu ist nach (6) nothwendig und hinreichend

$$y_\iota = \omega\, x_\iota \text{ aber da, wie wir gesehen:}$$

$$(22) \quad \Delta\, x_\iota = \sum_\rho y_\rho\, \xi_\iota^\rho \text{ und nach (11) } y_\rho = \Sigma\, x_\tau\, \xi_\rho^\tau, \text{ so folgt:}$$

$$(23) \quad \sum_\varkappa x_\varkappa \left(\xi_\rho^\varkappa - \omega\, \delta_{\rho\varkappa}\right) = 0 \qquad \delta_{\rho\varkappa} = 0 \;\rho \gtrless \varkappa, \;\; \delta_{\rho\rho} = 1$$

oder: $$(24) \quad \Omega(\omega) = \left|\, \xi_\rho^\varkappa - \omega\, \delta_{\rho\varkappa} \,\right| = 0.$$

Aber auch $\Omega(\omega) = \left|\, \xi_\varkappa^\rho - \omega\, \delta_{\varkappa\rho} \,\right|$ also:

$$\Omega(-\omega) = \left|\, \xi_\varkappa^\rho + \omega\, \delta_{\varkappa\rho} \,\right| \text{ mithin ist:}$$

$$\Omega(\omega) \;.\; \Omega(-\omega) = \left|\, \eta_{\alpha\beta} \,\right| \text{ wo}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \sum_\varkappa \xi_\alpha^\varkappa \;.\; \xi_\varkappa^\beta - \omega \sum_\varkappa \delta_{\alpha\varkappa}\, \xi_\varkappa^\beta + \omega\, \Sigma\, \xi_\alpha^\varkappa\, \delta_{\varkappa\beta} - \omega^2 \sum_\varkappa \delta_{\alpha\varkappa} \;.\; \delta_{\varkappa\beta}$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \;.\; \Delta - \omega\, \xi_\alpha^\beta + \omega\, \xi_\alpha^\beta - \omega^2\, \delta_{\alpha\beta}. \quad \text{D. h.}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = 0 \text{ für } \alpha \gtrless \beta \text{ und } \eta_{\alpha\alpha} = \Delta - \omega^2,$$

mithin $\left|\, \eta_{\alpha\beta} \,\right| = (\Delta - \omega^2)^3 = \Omega(\omega) \;.\; \Omega(-\omega)$ und

$$(25) \quad \Omega(\omega) = (\Delta - \omega^2)^3 = 0, \text{ d. h. es muss sein } \omega = \pm \sqrt{\Delta}.$$

Setzen wir $\omega = \varepsilon\sqrt{\Delta}$, so wird $\eta_{\alpha\beta} = 0$. Daraus folgt die Summe der Defecte in den beiden Systemen:

$$\left| \xi_\rho^\varkappa - \omega\,\delta_{\varkappa\rho} \right| \text{ und } \left| \xi_\rho^\varkappa + \omega\,\delta_{\varkappa\rho} \right| \text{ ist} \geqq 6.$$

Es habe das erste System den Defect μ, das zweite den Defect ν, also $\mu + \nu \geqq 6$, so haben die Gleichungen:

$$\Sigma\, X_\varkappa \left(\xi_\rho^\varkappa + \omega\,\delta_{\varkappa\rho} \right) = 0,\ \nu \text{ Lösungen } Y^{I},\ Y^{II} \ldots Y^{(\nu)}$$

$$\Sigma\, x_\varkappa \left(\xi_\rho^\varkappa - \omega\,\delta_{\varkappa\rho} \right) = 0,\ \mu \text{ Lösungen } y^{I},\ y^{II} \ldots y^{(\mu)}$$

Eine beliebige Lösung des zweiten Systems heisse y. Dann ist der zugehörige Complex ein Büschel, das heisst, die Gleichungen: $\Sigma\, \mathfrak{X}_\varkappa \sum_\iota a_{\iota\varkappa\lambda}\, y_\iota = 0$ haben 4 Lösungen.

Eine derselben ist y, eine zweite sei z. Dann ist:

$$\Sigma\, a_{\iota\varkappa\lambda}\, y_\iota\, z_\varkappa = 0$$

und der Complex $\Sigma\, a_{\iota\varkappa\lambda}\, z_\iota$ hat den Multiplicator y. Es ist daher nach (11)

$$\Sigma\, z_\varkappa\, \xi_\rho^\varkappa = p\, y_\rho + q z_\rho, \text{ folglich}$$

$$\Delta\, z_\lambda = p\,\Sigma\, y_\rho\, \xi_\lambda^\rho + q\,\Sigma\, z_\rho\, \xi_\lambda^\rho =$$

$$= p\,\omega\, y_\lambda + q\,(p y_\lambda + q z_\lambda) = p\,(\omega + q)\, y_\lambda + q^2 z_\lambda.$$

Da nun $z_\iota \neq y_\iota$ ist, so folgt:

$$p\,(\omega + q) = 0;\ q^2 = \Delta.$$

Es sind daher 2 Fälle möglich $p = 0$; $q^2 = \Delta$ und $q = -\omega$. Im ersten ist z dem System y^ι oder Y^ι angehörig. Wir lassen den Fall $p = 0$; $q = +\omega$ bei Seite und betrachten die beiden andern d. h. $q = -\omega$; p beliebig. Wir tragen diese Werthe oben ein, dann ist:

$$\sum_\varkappa z_\varkappa \left(\xi_\rho^\varkappa + \omega\,\delta_{\rho\varkappa} \right) = p\, y_\rho \text{ und } \Sigma\, y_\varkappa \left(\xi_\rho^\varkappa + \omega\,\delta_{\rho\varkappa} \right) = 2\,\omega\, y_\rho,$$

$$\text{also: } \Sigma \left(\xi_\rho^\varkappa + \omega\,\delta_{\rho\varkappa} \right) \left(2\,\omega\, z_\varkappa - p\, y_\varkappa \right) = 0, \text{ d. h.}$$

$2\,\omega\, z_\varkappa - p y_\varkappa = Y_\varkappa$ (Y eine Lösung des Systems $[-\omega]$) oder:

$2\,\omega\, z_\varkappa = p y_\varkappa + Y_\varkappa$.

Indem wir für Y die ν unabhängigen Werthe einsetzen, ergeben sich $\nu + 1$ unabhängige Werthe z. Für alle ist

$$\Sigma\, a_{\iota\varkappa\lambda}\, z_\iota\, (p\, y_\varkappa - \omega z_\varkappa) = 0 = p\,\Sigma\, a_{\iota\varkappa\lambda}\, y_\iota\, z_\varkappa.$$

Es ist also $\nu + 1 \leqq 4$, d. i. $\nu \leqq 3$, ebenso $\mu \leqq 3$, aber $\mu + \nu \geqq 6$, folglich $\mu = 3$, $\nu = 3$.

Dieses letztere Resultat allein kann man auch einfacher erhalten, jedoch haben wir hier gleichzeitig die zu den y und Y gehörigen viergliedrigen Gruppen wirklich hergestellt. Denn zunächst sind die 6 Werthe y^{I}, y^{II}, y^{III}, Y^{I}, Y^{II}, Y^{III} unabhängig, weil es sonst ein gemeinsames Element gäbe, für das $\Sigma y_\varkappa \xi_\rho^\varkappa = + \omega y_\rho = - \omega y_\rho$ wäre, d. h. $\omega = 0$ oder $\Delta = 0$, was wir ausschliessen.

Dann gehören aber in die viergliedrige Gruppe, welche den Complex $b_{\varkappa\lambda}$, der zu y^ρ gehört, bildet:

$$y^\rho,\ Y^{I},\ Y^{II},\ Y^{III}.$$

Dadurch ist sie bestimmt und in die zu Y^ρ gehörige: Y^ρ, y^{I}, y^{II}, y^{III}.

Alles ist nur im allgemeinen, d. h. $\Delta \neq 0$, der Fall.

Gehen wir jetzt zu den Specialfällen über, setzen also $\Delta = 0$, so ist:

$$\sum_\tau \xi_\iota^\tau \xi_\tau^\varkappa = 0.$$

Daraus folgt, der Defect der Determinante $\left| \xi_\iota^\varkappa \right|$ ist $\geqq 3$. Nehmen wir den ersten Fall. Der Defect sei $= 3$. Dann ergiebt zunächst die Gleichung (25), dass hier nur zu den Lösungen der Gleichung:

$$\sum_\varkappa y_\varkappa \xi_\rho^\varkappa = 0$$

viergliedrige Gruppen gehören können. Es seien diese Lösungen y^{I}, y^{II}, y^{III} und y eine beliebige unter ihnen. Dann hat also die Gleichung $\Sigma \mathfrak{X}_\varkappa \Sigma a_{\iota\varkappa\lambda}\ y_\iota = 0$ 4 Lösungen. Eine derselben ist y, eine zweite sei z, so können wir von z voraussetzen, dass es nicht in der dreigliedrigen Gruppe y^{I}, y^{II}, y^{III} liegt. Dann hat der Complex

$$b_{\varkappa\lambda} = \Sigma a_{\iota\varkappa\lambda}\ z_\iota$$

nur 2 Multiplicatoren y u. z, d. h. Lösungen der Gleichungen

$$\sum_\varkappa \mathfrak{X}_\varkappa b_{\varkappa\lambda} = 0.$$

Dieselben sind daher nach (11) durch die Gleichung verbunden:

$$\sum_{\varkappa} z_{\varkappa}\, \xi_{\rho}^{\varkappa} = p\, y_{\rho} + q\, z_{\rho},$$

oder wenn wir mit ξ_{λ}^{ρ} multipliciren und über ρ summiren,

mit Berücksichtigung $\Delta = 0$ und $\sum_{\rho} y_{\rho}\, \xi_{\lambda}^{\rho} = 0$,

so folgt: $q \sum_{\rho} z_{\rho}\, \xi_{\lambda}^{\rho} = 0$, d. h. $q = 0$,

es ist also: (26) $\sum z_{\varkappa}\, \xi_{\rho}^{\varkappa} = p\, y_{\rho}$, und wenn dies der Fall, so folgt für $p \neq 0$

$$\sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, y_{\iota}\, z_{\varkappa} = 0.$$

Demgemäss haben alle Lösungen der Gleichungen (26) und nur solche die Eigenschaft in der zu y gehörigen Gruppe zu liegen. Diese Gleichungen haben auch wirklich 4 Lösungen (da p selbst unbestimmt) und unter diesen die Grössen y^{I}, y^{II}, y^{III}.

Wir fassen dies folgendermaassen zusammen:

Im Falle $\Delta = 0$, wenn weitere Specialitäten nicht eintreten, haben die Lösungen der Gleichungen:

$$(a) \quad \sum_{\varkappa} y_{\varkappa}\, \xi_{\rho}^{\varkappa} = 0$$

die Eigenschaft, dass der zu ihnen gehörige Complex eine viergliedrige Gruppe ist, und nur diese. Die Gruppen z selbst, die zu einem y gehören, genügen den Gleichungen:

$$(b) \quad \sum z_{\varkappa}\, \xi_{\rho}^{\varkappa} = p\, y_{\rho}$$

und gehen daher durch die durch (a) definirte dreigliedrige Gruppe hindurch.

Wenn der Defect der Determinante $\left| \xi_{\iota}^{\varkappa} \right|$ 4 ist, so stellt sich die Untersuchung analog. Nur haben dann die zuletzt mit (a) bezeichneten Gleichungen 4 Lösungen y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}. Die zu je einem y gehörige viergliedrige Gruppe ist durch die Gleichung (b) bestimmt. Ist z eine Lösung derselben, und $p \neq 0$, so ist auch $z + q y^{\iota}$ ($\iota = 1, 2, 3, 4$) eine solche, d. h. die viergliedrige Gruppe, die zu einem y gehört, ist in allen Fällen dieselbe, nämlich y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}. Demgemäss ist:

$$\rho \sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, y_\iota^{I} = \sigma \sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, y_\iota^{II}$$

d. h. $$\sum_\iota a_{\iota\varkappa\lambda} (\rho\, y_\iota^{I} - \sigma\, y_\iota^{II}) = 0.$$

Wenn es aber einen solchen Werth η giebt, für den

$$\sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\iota = 0 \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \ldots 6),$$

so folgt, wie wir noch sehen werden, dass der Defect $= 5$ ist. Der Fall, dass $\left| \xi_\iota^\varkappa \right|$ einen Defect $= 4$ habe, ist daher unmöglich.

Gehen wir jetzt zu dem Fall, dass der Defect $= 5$, d. h. dass die Unterdeterminanten 2. Grades $= 0$ seien, so folgt, dass sich die $\xi_\iota^\varkappa$ darstellen in der Form:

$$\xi_\iota^\varkappa = \sigma_\varkappa\, \eta_\iota.$$

Dann ist also: $\sum_\iota a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\iota = A_{\mu\varkappa\lambda} = 0$ $(\varkappa, \lambda = 1 \ldots 6)$.

Ist dies umgekehrt der Fall, so ist der Defect der Determinante $= 5$ und $\xi_\iota^\varkappa = \sigma_\varkappa\, \eta_\iota$.

Denn, wenn $\xi_\iota^\varkappa = \sigma_\varkappa\, \eta_\iota$, so folgt zunächst allerdings nur $\sigma_\varkappa \sum_\iota a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\iota = 0$.

Ist aber $\sigma_\varkappa = 0$, so ist $\sum_\lambda a_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\tau = \sum_\lambda a_{\tau\iota\lambda}\, \xi_\lambda^\varkappa = 0$ und da eines der σ wenigstens $\neq 0$ etwa σ_τ, so folgt:

$$\sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\lambda = 0.$$

Gehen wir umgekehrt von dieser Gleichung aus, so folgt zunächst: $\xi_\iota^\varkappa = \sigma_\varkappa\, \eta_\iota$ für $\iota \neq \varkappa$, wo der Fall $\sigma_\varkappa = 0$ eingeschlossen werden muss. Aber auch: $\xi_\varkappa^\varkappa = \sigma_\varkappa\, \eta_\varkappa$. Denn:

$$\sum a_{\iota\varkappa\tau}\, \xi_\tau^\lambda = \sum a_{\lambda\iota\tau}\, \xi_\tau^\varkappa \text{ also}$$

$$\sigma_\lambda \sum_\tau a_{\iota\varkappa\tau}\, \eta_\tau + a_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\lambda - \sigma_\lambda a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\lambda = \sigma_\varkappa \sum a_{\lambda\iota\tau}\, \eta_\tau + a_{\lambda\iota\varkappa}\, \xi_\varkappa^\varkappa - \sigma_\varkappa a_{\lambda\iota\varkappa}\, \eta_\varkappa$$

$$\xi_\varkappa^\varkappa - \sigma_\varkappa\, \eta_\varkappa = \xi_\lambda^\lambda - \sigma_\lambda\, \eta_\lambda \text{ oder}$$

$$\xi_\varkappa^\varkappa - \xi_\lambda^\lambda = \sigma_\varkappa\, \eta_\varkappa - \sigma_\lambda\, \eta_\lambda$$

Ferner $\xi_\iota^\varkappa \, \xi_\lambda^\iota + (\xi_\varkappa^\varkappa + \xi_\lambda^\lambda) \, \xi_\lambda^\varkappa + \xi_\mu^\varkappa \cdot \xi_\lambda^\mu + \xi_\nu^\varkappa \cdot \xi_\lambda^\nu + \xi_\rho^\varkappa \cdot \xi_\lambda^\rho = 0$

$$\xi_\varkappa^\varkappa + \xi_\lambda^\lambda = - \sigma_\iota \eta_\iota - \sigma_\mu \eta_\mu - \sigma_\nu \eta_\nu - \sigma_\rho \eta_\rho,$$

$$\text{folglich:} \quad 2 \xi_\varkappa^\varkappa = 2 \sigma_\varkappa \eta_\varkappa - \Sigma \sigma_\tau \eta_\tau$$

Da aber (12) leicht folgt: $\Sigma \xi_\varkappa^\varkappa = 0$, so folgt erstens

$$\xi_\varkappa^\varkappa = \sigma_\varkappa \eta_\varkappa, \text{ also allgemein } \xi_\iota^\varkappa = \sigma_\varkappa \eta_\iota$$

$$\text{und ferner} \quad \sum_\varkappa \sigma_\varkappa \eta_\varkappa = 0.$$

Was die Bedeutung der σ anlangt, so können wir folgendes darüber aussagen: Da zu $\alpha_{\iota\varkappa\lambda}$ dasselbe Tableau der ξ mit verkehrten Zeichen und Zeilen und Colonnen gehört, so muss es nach dem Vorigen einen Werth geben, für den $\Sigma \alpha_{\iota\varkappa\lambda} x_\iota = 0$ ist, und dies ist σ, also:

$$\Sigma \alpha_{\iota\varkappa\lambda} \sigma_\iota = 0.$$

Wir wenden uns zu der Frage: Welchem x entsprechen viergliedrige Gruppen? Schliessen wir den Werth $x = \eta$ zunächst aus, so folgt nach (11)

$$y_\rho = \Sigma x_\tau \xi_\rho^\tau = \Sigma x_\tau \sigma_\tau \eta_\rho = \eta_\rho \Sigma x_\tau \sigma_\tau.$$

Es ist daher der zu x gehörige Complex dann und nur dann eine viergliedrige Gruppe, wenn

$$\Sigma x_\tau \sigma_\tau = 0.$$

Es sei x ein dieser Gleichung genügender Werth, so haben also die Gleichungen: $\Sigma a_{\iota\varkappa\lambda} x_\iota X_\varkappa = 0$ 4 Lösungen. Die erste ist $X_\iota = x_\iota$, die 2. $X_\iota = \eta_\iota$, die 3. sei z_ι, die 4. u_ι. Dann ist: $\Sigma a_{\iota\varkappa\lambda} z_\iota z_\varkappa = \Sigma a_{\iota\varkappa\lambda} z_\iota x_\varkappa = \Sigma a_{\iota\varkappa\lambda} z_\iota \eta_\varkappa = 0$, also hat die Gleichung: $\sum_{\iota,\varkappa} a_{\iota\varkappa\lambda} z_\iota Z_\varkappa = 0$ drei und folglich auch 4 Lösungen, d. h. $\Sigma z_\iota \sigma_\iota = 0$ ebenso auch $\Sigma u_\iota \sigma_\iota = 0$.

Die zu x gehörige viergliedrige Gruppe liegt daher in der fünfgliedrigen Gruppe $\Sigma x_\tau \sigma_\tau = 0$.

In dieser bilden die zu x gehörigen Gruppen einen Complex ($n = 5$), denn die zu jedem x gehörige viergliedrige Gruppe geht durch x selbst. Ein solcher Complex hat ferner stets ein solches ausgezeichnetes Element, wie es hier η ist, d. h. ein solches, durch das alle Gruppen gehen.

Ist endlich der Defect = 6, d. h. $\xi_\iota^\varkappa = 0$, so folgt aus (11) $y_\rho = 0$, d. h. jedem x entspricht eine viergliedrige Gruppe, z. B. entspreche dem Element x die Gruppe $(x) = x, x^I, x^{II}, x^{III}$,

" " y " " $(y) = y, y^I, y^{II}, y^{III}$,

und es sei y so gewählt, dass es ausserhalb der Gruppe (x) liegt. Dann ist: $\sum_{\iota,\varkappa} a_{\iota\varkappa\lambda}\, x_\iota\, y_\varkappa = A_\lambda$ nicht sämmtlich = 0 und

$$\sum A_\lambda\, x_\lambda = 0;\ \sum A_\lambda\, y_\lambda = 0;\ \sum A_\lambda\, x_\lambda^I = 0;\ \sum A_\lambda\, x_\lambda^{II} = 0;$$
$$\sum A_\lambda\, x_\lambda^{III} = 0;\ \sum A_\lambda\, y_\lambda^I = 0 \ \ldots\ldots\ \sum A_\lambda\, y_\lambda^{III} = 0,$$

folglich bilden die Gruppen (x) und (y) eine fünfgliedrige Gruppe und haben daher eine dreigliedrige gemein.

Die Gruppe (z) sei jetzt = z, z^I, z^{II}, z^{III} und z liege ausserhalb der durch (x) und (y) bestimmten fünfgliedrigen Gruppe. Dann folgt: Von den 3 Gruppen (x), (y) und (z) haben je 2 eine dreigliedrige gemein, sie liegen aber nicht in derselben fünfgliedrigen, folglich haben sie dieselbe dreigliedrige $\eta^I, \eta^{II}, \eta^{III}$ gemein. Nun war aber z beliebig, während $\eta^I, \eta^{II}, \eta^{III}$ schon durch die Gruppen (x) und (y) bestimmt waren. Es folgt daher: Für alle z ausserhalb der fünfgliedrigen Gruppe ist

$$\sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\iota^I\, z_\varkappa = 0, \text{ d. h.}$$

$\sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\iota^I = 0$ und ebenso $\sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\iota^{II} = 0$ $\sum a_{\iota\varkappa\lambda}\, \eta_\iota^{III} = 0$.

Setzen wir daher:

$$\sum a_\iota^I\ \eta_\iota^I = 0,\ \sum a_\iota^I\ \eta_\iota^{II} = 0,\ \sum a_\iota^I\ \eta_\iota^{III} = 0$$
$$\sum a_\iota^{II}\ \eta_\iota^I = 0,\ \sum a_\iota^{II}\ \eta_\iota^{II} = 0,\ \sum a_\iota^{II}\ \eta_\iota^{III} = 0$$
$$\sum a_\iota^{III}\, \eta_\iota^I = 0,\ \sum a_\iota^{III}\, \eta_\iota^{II} = 0,\ \sum a_\iota^{III}\, \eta_\iota^{III} = 0, \text{ so ist}$$
$$a_{\iota\varkappa\lambda} = \left| a_\nu^I,\ a_\nu^{II},\ a_\nu^{III} \right| \quad \nu = (\iota, \varkappa, \lambda).$$

Es sind daher $a_{\iota\varkappa\lambda}$ die 20 Coordinaten einer dreigliedrigen Gruppe. Umgekehrt ist die Bedingung $\xi_\iota^\varkappa = 0$ auch nothwendig, schon deshalb, weil jedem x eine viergliedrige Gruppe entsprechen muss, d. h. $\sum x_\varkappa\, \xi_\rho^\varkappa = 0$, also $\xi_\rho^\varkappa = 0$.

Es sind daher die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen[1]) dafür, dass 20 Grössen $a_{\iota\varkappa\lambda}$ Coordinaten einer dreigliedrigen Gruppe sind, die 36 Gleichungen

$$\xi_\iota^\varkappa = 0 \quad (\iota, \varkappa = 1 \ldots 6).$$

Das letzte Ergebniss lässt sich so aussprechen:

Haben die Gleichungen:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa\lambda} X_\iota = 0, \text{ wo}$$

$$a_{\iota\varkappa\lambda} = - a_{\varkappa\iota\lambda} = - a_{\iota\lambda\varkappa} = \ldots$$

2 Lösungen, so haben sie stets noch eine dritte.

Es sind also beim Ebenencomplex folgende Specialitäten möglich: 1) $\left| \xi_\iota^\varkappa \right| = 0$ nothwendige und hinreichende Bedingung $\Delta = 0$. 2) Die Gleichungen $\sum_\iota a_{\iota\varkappa\lambda} X_\iota$ haben eine Lösung. Nothwendig und hinreichend: $A_{\iota\varkappa\lambda} = 0 \, (\iota, \varkappa, \lambda = 1 \ldots 6)$. 3) Die Gleichungen haben 2 und daher auch 3 Lösungen. Nothwendig und hinreichend:[2]) $\xi_\iota^\varkappa = 0 \quad (\iota, \varkappa = 1 \ldots 6)$.

---

[1]) Cayley hat im 15. Band des Quaterly Journal sich mit dem Aufstellen der Bedingungen zwischen den Coordinaten der dreigliedrigen Gruppe ($n = 6$), d. i. zwischen den Determinanten der Matrix (6, 3) beschäftigt. Er giebt aber nur 15 auf 5 zurückführbare, nämlich nach der obigen Bezeichnung: $\xi_\iota^\iota + \xi_\varkappa^\varkappa = 0 \, (\iota, \varkappa = 1, 2 \ldots 6)$.

Sonstige Versuche, die Bedingungen aufzustellen, sind mir nicht bekannt.

[2]) Wir fügen noch Folgendes hinzu:

Ist $\xi_\iota^\varkappa = 0 \, (\iota \neq \varkappa)$, so folgt: $A_{\iota\varkappa\lambda} = a_{\iota\varkappa\lambda} \, \xi_\lambda^\lambda = a_{\varkappa\lambda\iota} \, \xi_\iota^\iota$,

folglich: $\xi_\lambda^\lambda = \xi_\iota^\iota$ und da $\Sigma \, \xi_\varkappa^\varkappa = 0$, so folgt auch:

$$\xi_\iota^\varkappa = 0 \quad (\iota, \varkappa = 1, 2 \ldots 6).$$

Ausgenommen ist der Fall, wo nur 2 conjugirte Coordinaten $\neq 0$ sind, etwa $a_{\iota\varkappa\lambda}$ und $a_{\mu\nu\rho}$, dann ist:

$$\xi_\iota^\iota = \xi_\varkappa^\varkappa = \xi_\lambda^\lambda = - \xi_\mu^\mu = - \xi_\nu^\nu = - \xi_\rho^\rho \text{ und } \neq 0.$$

Um diesen Fall auszuschliessen, müssen daher die Bedingungen $\xi_\varkappa^\varkappa = 0$ zu den (nothwendigen und) hinreichenden hinzugefügt werden, obschon sie sonst aus den anderen folgen.

§ 9.

Die Constructionen der dreigliedrigen Gruppe.

Nach den Vorbereitungen des § 8 können wir daran gehen, die Zahl der Lösungen der Gleichungen:

$$(1) \quad \sum_{\iota,\varkappa,\lambda} a^{(\mu)}_{\iota\varkappa\lambda}\, x_\iota\, y_\varkappa\, z_\lambda = 0 \quad (\iota, \varkappa, \lambda = 1, 2 \ldots 6;\ \mu = 1 \ldots 9),$$

wo

$$(2) \quad a^{(\mu)}_{\iota\varkappa\lambda} = - a^{(\mu)}_{\varkappa\iota\lambda} = - a^{(\mu)}_{\iota\lambda\varkappa}$$

zu bestimmen, d. h. nach den Bezeichnungen des § 8 die Frage zu beantworten: Wie viel Ebenen haben 9 lineare Ebenencomplexe gemein?

Die zu suchenden Lösungen müssen sich wieder aus den Lösungen der allgemeineren Gleichungen:

$$(3) \quad \Sigma\, a^{(\mu)}_{\iota\varkappa\lambda}\, g_{\iota\varkappa\lambda} = 0$$

zusammensetzen lassen, d. h. aus 11 Systemen $g^{(\mu)}_{\iota\varkappa\lambda}$. Da diese wieder als Ebenencomplexe gedeutet werden hönnen, so erhält dadurch die zu behandelnde Frage die Form: Wie viel specielle Ebenencomplexe, d. i. solche, die dreigliedrige Gruppen (Ebenen) sind, enthält die 11gliedrige Ebenencomplexgruppe?

Diese Form legt nahe, eine allgemeinere Frage zu erörtern und die Häufigkeit aller speciellen Ebenencomplexe, wie sie in dem § 8 aufgestellt wurden, in einer Gruppe zu untersuchen.

Fassen wir die Frage algebraisch, so ist die Gruppe gegeben durch:

$$(4) \quad v_{\iota\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{m} \Xi_\mu\, g^{(\mu)}_{\iota\varkappa\lambda},$$

und es steht in Frage, die Zahl m zu finden, bei der zuerst Complexe der 3 in § 8 behandelten Specialitäten auftreten und die Zahl derselben festzustellen.

Da nun ein Complex der ersten besprochenen Specialität (Determinante $\left|\, \xi_\iota^\varkappa \,\right|$ hat den Defect 3) die nothwendige und hinreichende Bedingung:

(5) $\Delta = 0$ zu erfüllen hat, der Complex, bei dem die Determinante den Defect 5 besitzt, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$(6) \qquad V_{\iota\varkappa\lambda} = 0 \quad (\iota, \varkappa, \lambda = 1 \ldots 6)$$

und endlich die dreigliedrige Gruppe (Defect = 6) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$(7) \qquad \xi_\iota^\varkappa = 0 \quad (\iota, \varkappa = 1 \ldots 6),$$

wo die $V_{\iota\varkappa\lambda}$ und $\xi_\iota^\varkappa$ zu den $v_{\iota\varkappa\lambda}$ in (4) dieselbe Bedeutung haben, wie die in dem § 8 analog bezeichneten Grössen zu den dortigen $a_{\iota\varkappa\lambda}$, so folgt:

Es handelt sich darum, das Gewicht der Gleichung (5) resp. das Gewicht der 20 Gleichungen (6) resp. das der 36 Gleichungen (7) zu bestimmen.

Dabei ist zu beachten, dass ich jedem System die Gleichungen des Vorhergehenden hinzufügen kann, ohne das Gewicht zu ändern, ferner, dass bis auf die bereits S. 53 bemerkte Relation $\sum_\varkappa \xi_\varkappa^\varkappa = 0$ sämmtliche Gleichungen linear unabhängig sind.

Für $\Delta = 0$ ist $m = 2$ zu nehmen. Das Gewicht ist hier natürlich die Ordnung, also $= 4$.

Für das Folgende lassen wir in (4) m unbestimmt und deuten die Ξ_μ ($\mu = 1 \ldots m$) als homogene Coordinaten im Raume von m—1 Dimensionen. Demnächst wählen wir die Bezeichnungen der Räume, wie in § 5, als R_p^q, wenn p die Ordnung, q die Dimension ist und legen auch hier den a. a. O. angeführten Satz von Noether zu Grunde.

Gehen wir nun zu der Betrachtung des Systems (6) über, so erinnern wir uns der Gleichungen:

$$(8) \qquad \sum_\lambda V_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\alpha = \Delta\, v_{\iota\varkappa\alpha} \quad \text{(S. 47 (20))},$$

es stehen also 4 Grössen V in Abhängigkeit, z. B. V_{123}, V_{124}, V_{125}, V_{126}. Die 3 ersteren also: V_{123}, V_{124}, $V_{125} = 0$ gesetzt, schneiden sich in einem R_{27}^{m-4}, für denselben ist nach (8) entweder auch $V_{126} = 0$ oder ($\alpha = 1, 2$) ξ_6^1 und $\xi_6^2 = 0$. Um den restirenden Raum: V_{123}, V_{124}, V_{125}, ξ_6^1, $\xi_6^2 = 0$ zu finden, beachten wir, dass:

(9) $\begin{cases} \xi_5^1 \cdot \xi_6^2 - \xi_5^2 \cdot \xi_6^1 = v_{123}\, V_{124} - v_{124}\, V_{123} \text{ und analog} \\ \xi_4^2 \cdot \xi_6^1 - \xi_4^1 \cdot \xi_6^2 = v_{123}\, V_{125} - v_{125}\, V_{123}, \end{cases}$

es ist daher für den Theil des durch

$$\xi_6^1 = \xi_6^2 = V_{123} = 0 \text{ definirten } R_{12}^{m-4}$$

auch $V_{124}, V_{125} = 0$, für den nicht $v_{123} = 0$; andrerseits aber ist für $\xi_6^1 = \xi_6^2 = v_{123} = 0$, d. i. für einen R_4^{m-4}, auch $V_{123} = 0$ mit Ausnahme des R_1^{m-4}: $0 = v_{123} = v_{124} = v_{125}$.

Demnach ist:

(10) $$V_{123} = V_{124} = V_{125} = V_{126} = 0$$

für einen $R_{27-[12-(4-1)]}^{m-4} = R_{18}^{m-4}$.

Für denselben ist aber nach (8) auch:

$$\Delta \cdot v_{12\alpha} = 0 \quad (\alpha = 3, 4, 5, 6),$$

also, da $v_{123} = v_{124} = v_{125} = v_{126} = 0$ i. A.[1]) auf dem R_{18}^{m-4} nicht statt haben kann, so ist auf ihm stets:

(10[1]) $\Delta = 0$ und daher nach (8)

$$\sum_\lambda V_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\lambda^\alpha = \Delta\, v_{\iota\varkappa\alpha} = 0.$$

Vermöge der zu (8) in Bezug auf den conjugirten Ebenencomplex analogen Gleichung (vergl. S. 48):

(11) $$V_{\iota\varkappa\lambda}\, \xi_\nu^\mu - V_{\iota\varkappa\mu}\, \xi_\nu^\lambda + V_{\lambda\varkappa\mu}\, \xi_\nu^\iota - V_{\lambda\iota\mu}\, \xi_\nu^\varkappa = \Delta \cdot v_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

ist für $\iota = 1$, $\varkappa = 2$, $\lambda = 3$, $\mu = 4$,

$$V_{134}\, \xi_\nu^2 - V_{234}\, \xi_\nu^1 = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots 6),$$

so dass, wenn wir mit V_{134} schneiden, sich ein Raum absondert, in dem auch $V_{234} = 0$ ist. Bevor wir aber überhaupt weitere Schnitte führen können, müssen wir (wie auf S. 28) die Frage discutiren, ob auch jeder Punkt, der den Gleichungen (10) und (10[1]) genügt, auf dem erhaltenen R_{18}^{m-4} liegt. Ausnahmepunkte müssten auf den anderen Schnittcurven liegen, für sie wäre also:

$$\xi_6^1, \xi_6^2 \xi_5^1, \xi_5^2, \xi_4^1, \xi_4^2, \xi_3^1, \xi_3^2 = 0 \text{ aber auch}$$

$$\xi_2^2 = \xi_1^1 = \xi_2^1 = \xi_1^2 = 0 \text{ oder } v_{123} = v_{124} = v_{125} = v_{126} = \Delta = 0.$$

---

[1]) Anderenfalls durch andere Wahl des Ausgangspunktes (ι, $\varkappa$ statt 1, 2) zu vermeiden.

Während ersterer Raum wegen der grossen Zahl der Bedingungen überhaupt nicht in Frage kommt, ist es vom zweiten $v_{123} = v_{124} = v_{125} = v_{126} = \Delta = 0$ von Wichtigkeit zu wissen, ob er überhaupt auf R_{18}^{m-4} liegt.

Dass dies in der That der Fall, sieht man so ein; wir können auch die Schnitte anders führen, z. B. zuerst: V_{123}, V_{124} und $\Delta = 0$ und erhalten natürlich denselben R_{18}^{m-4} und für die eventuellen Ausnahmepunkte die Bedingungen: $V_{1\varkappa\lambda} = V_{2\varkappa\lambda} = 0$. Daraus folgt, dass der Raum $v_{123} = v_{124} = v_{125} = v_{126} = \Delta = 0$ ganz auf R_{18}^{m-4} liegt.

Wir gehen jetzt daran, den Schnitt V_{134} zu führen. Für den entstehenden R_{54}^{m-5} ist nach dem Vorigen entweder $\xi_\iota^1 = 0$ $(\iota = 1, 2 \ldots 6)$ oder $V_{234} = 0$. Ersteres ist der Fall für einen R_{10}^{m-5} (S. 28) folglich:

(12) $\quad V_{12\varkappa} = 0,\ V_{134} = 0,\ V_{234} = 0$ für einen R_{44}^{m-5}.

Schneiden wir wieder mit $V_{135} = 0$, so ergiebt sich ein: $R_{3\cdot44}^{m-6} = R_{132}^{m-6}$, für denselben ist nach (8) in Verbindung mit (10[1]) entweder $\xi_6^\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1 \ldots 6)$ oder $V_{136} = 0$.

Ersteres ist der Fall für den Schnitt des durch $\xi_6^\varkappa = 0$ gegebenen R_{10}^{m-5} mit $V_{126} = 0$, also für einen R_{30}^{m-6} folglich:

(13) $\quad V_{12\varkappa} = 0,\ V_{13\varkappa} = 0,\ V_{234} = 0$ für einen $R_{132-30}^{m-6} = R_{102}^{m-6}$.

Wenn wir wiederum von diesem den durch $\xi_\iota^1 = 0;\ V_{234} = 0$ gegebenen R_{30}^{m-6} abziehen, so bleibt ein R_{72}^{m-6} übrig, in welchem:

(14) $\quad V_{12\varkappa} = V_{13\varkappa} = V_{23\varkappa} = 0.$

Dies bedeutet, wie leicht zu sehen, nichts anderes, als dass in

$$\left| \xi_1^\nu,\ \xi_2^\nu,\ \xi_3^\nu,\ \xi_4^\nu,\ \xi_5^\nu,\ \xi_6^\nu \right| \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

die Determinanten zweiten Grades $= 0$ sind.

Nun ist in Folge von (14)

$$v_{123}\,\xi_\varkappa^\nu - v_{12\nu}\,\xi_\varkappa^3 + v_{13\nu}\,\xi_\varkappa^2 - v_{23\nu}\,\xi_\varkappa^1 = 0 \text{ und}$$

$$v_{123}\,\xi_\lambda^\nu - v_{12\nu}\,\xi_\lambda^3 + v_{13\nu}\,\xi_\lambda^2 - v_{23\nu}\,\xi_\lambda^1 = 0, \text{ folglich}$$

$$v_{123}\left(\xi_\varkappa^\nu\,\xi_\lambda^\mu - \xi_\varkappa^\mu\cdot\xi_\lambda^\nu\right) = 0 \text{ für } \mu = 1, 2, 3.$$

Hieraus folgt, dass entweder $v_{123} = 0$ oder alle Unterdeterminanten 2. Grades in $\left|\,\xi_\iota^\varkappa\,\right| = 0$ sind, d. h. also $V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$.

Wir haben also noch den Raum abzuziehen, in dem die Bedingungen (14) zugleich mit $v_{123} = 0$ erfüllt werden. $v_{123} = 0$ schneidet den durch (12) gegebenen Raum in einem R_{44}^{m-6}. Für denselben ist (s. oben):

$$-v_{124}\,\xi_\varkappa^3 + v_{134}\,\xi_\varkappa^2 - v_{234}\,\xi_\varkappa^1 = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots 6),$$

folglich nach der oben angewendeten Methode entweder $V_{13\varkappa} = V_{23\varkappa} = 0$ oder $v_{124} = 0$.

Das letztere ist der Fall für den R_{18}^{m-6}, in dem $0 = v_{123} = v_{124} = V_{12\varkappa} = \Delta$, mit Ausnahme des Theilraumes, in dem $v_{125} = v_{126} = 0$. Denn:

$$v_{134}\,\xi_2^2 - v_{234}\,\xi_2^1 = -V_{134} \text{ und}$$

$$v_{134}\,\xi_\varkappa^2 - v_{234}\,\xi_\varkappa^1 = 0 \quad (\varkappa = 3, 4, 5, 6),$$

folglich würde sich ergeben: $V_{134}\,\xi_\varkappa^1 = V_{134}\,\xi_\varkappa^2 = 0$, $\varkappa = (3, 4, 5, 6)$ und ebenso $V_{234}\,\xi_\varkappa^1 = V_{234}\,\xi_\varkappa^2 = 0$, also entweder $V_{134} = V_{234} = 0$ oder $\xi_\varkappa^1 = \xi_\varkappa^2 = 0$. Letzteres ergiebt: $v_{12\varkappa} = \Delta = 0$ also einen R_4^{m-6}. Derselbe wird von R_{18}^{m-6} abgezogen, lässt also einen R_{14}^{m-6} übrig, in dem $v_{123} = v_{124} = V_{12\varkappa} = 0$ und dieser ist von dem R_{44}^{m-6} abzuziehen, so dass ein R_{30}^{m-6} übrig bleibt. Für denselben ist also $v_{123} = V_{12\varkappa} = V_{13\varkappa} = V_{23\varkappa} = 0$. Es bleibt daher von dem durch (13) bestimmten R_{72}^{m-6} nur ein R_{42}^{m-6} übrig, in dem:

$$V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$$

und wie auf die bereits mehrfach geschilderte Art leicht einzusehen, liegen auch alle Lösungen der Gleichungen auf

demselben. Da nun $m - 6 \geqq 0$, so folgt $m \geqq 6$. D. h. die Dimension der Gleichungen $V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$ ist $= 5$, ihr Gewicht $= 42$. Oder: In der sechsgliedrigen Gruppe giebt es 42 Ebenencomplexe, deren Determinante den Defect 5 hat.

Wenn aber $V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$, so giebt es, wie bewiesen, eine Grösse η von der Beschaffenheit, dass

$$\Sigma\, \eta_\iota\, v_{\iota\varkappa\lambda} = 0.$$

Wir können also sagen: Die Determinanten der Matrix: $\left| v_{\iota\varkappa\lambda} \right| = 0 \left(\begin{smallmatrix} \iota = 1 \ldots 6 \\ \varkappa, \lambda = 1 \ldots 6 \end{smallmatrix}\right)$ haben das Gewicht 42.

Wir berechnen jetzt das Gewicht der Gleichungen (7).

Hierzu können wir das eben erlangte Resultat benützen. Denn schneiden wir den dort erhaltenen R_{42}^{m-6}, in dem

$$V_{\iota\varkappa\lambda} = 0 \quad (\iota, \varkappa, \lambda = 1 \ldots 6)$$

und folglich in dem Schema $\left| \xi_\iota^\varkappa \right|$ alle Unterdeterminanten 2. Grades verschwinden, durch $\xi_6^1 = 0$, so muss der erhaltene R_{84}^{m-7} in zwei vollkommen symmetrische Theile zerfallen, deren einer gegeben ist durch die Gleichungen:

$$V_{\iota\varkappa\lambda} = 0,\ \xi_\iota^1 = 0,$$

während der andere bestimmt wird durch

$$V_{\iota\varkappa\lambda} = 0,\ \xi_6^\varkappa = 0.$$

Beide sind von gleicher Ordnung, weil unser System in Bezug auf Horizontalen und Vertikalen symmetrisch ist (S. 45). Es ist also jeder Raum von der Ordnung 42.

Wir behandeln nur den Raum

$$V_{\iota\varkappa\lambda} = 0,\ \xi_\iota^1 = 0$$

weiter, indem wir ihn durch $\xi_6^2 = 0$ schneiden. Es sind dann wieder entweder die Glieder der Horizontalen 0, oder die der Vertikalen, welche beide das Glied ξ_6^2 gemein haben. Um die verloren gegangene Symmetrie wieder herzustellen, lassen wir den R^{m-8}, in dem $V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$, $\xi_\iota^1 = 0$, $\xi_\iota^2 = 0$,

ausser Acht. Derselbe ist, wie wir später nachweisen werden, ebenfalls von der Ordnung 42, so dass ein R_{42}^{m-8} restirt, in dem:

$$V_{\iota\varkappa\lambda} = 0;\ \xi_\iota^1 = 0;\ \xi_6^\varkappa = 0.$$

Dass $V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$, $\xi_\iota^1 = 0$, $\xi_\iota^2 = 0$ für einen R_{42}^{m-8} erfüllt sind, lässt sich folgendermaassen einsehen:

Es schneiden sich nach S. 28

$$\xi_2^1,\ \xi_3^1,\ \xi_4^1,\ \xi_5^1,\ \xi_6^1 = 0$$

in einem R_5^{m-4}. Desgleichen

$$\xi_1^2,\ \xi_3^2,\ \xi_4^2,\ \xi_5^2,\ \xi_6^2 = 0$$

in einem (anderen) R_5^{m-4}. Diese beiden haben einen R_{25}^{m-7} gemein. Schneiden wir diesen mit $\xi_1^1 = 0$, so ist auch $\xi_2^2 = 0$. Denn es ist nach (19) S. 47

$$\Delta = \left(\xi_1^1\right)^2 = \left(\xi_2^2\right)^2.$$

Es entsteht auf diese Art ein R_{50}^{m-8}, in dem

$$\xi_\iota^1 = 0;\ \xi_\iota^2 = 0\ (\iota = 1, 2 \ldots 6).$$

Dann ist aber auch:

$$v_{12\lambda}\ \xi_\iota^\varkappa - v_{12\varkappa}\ \xi_\iota^\lambda = 0 \begin{pmatrix} \iota = 1, 2 \ldots 6 \\ \varkappa, \lambda = 3, 4, 5, 6 \end{pmatrix}.$$

Also entweder sind $v_{12\varkappa} = 0$ $(\varkappa = 3, 4, 5, 6)$ oder in $\left|\ \xi_\iota^\varkappa\ \right|$ sind die Unterdeterminanten 2. Grades $= 0$, d. h. $V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$.

Da ersteres für einen R_8^{m-8} $\left(v_{12\varkappa} = 0;\ \xi_1^1 = \xi_2^1 = \xi_1^2 = 0\right)$ der Fall ist, so bleibt in der That ein R_{42}^{m-8} übrig, wie wir oben voraussetzten. Wir lassen diesen jedoch ausser Acht und wenden uns zu demjenigen R_{42}^{m-8}, für den

$$\xi_\iota^1 = 0;\ \xi_6^\varkappa = 0;\ V_{\iota\varkappa\lambda} = 0.$$

Wir schneiden denselben mit $\xi_5^2 = 0$.

Dann können wir wieder wie oben argumentiren, dass 2 symmetrische R_{42}^{m-9} entstehen, in deren einem

$$\xi_\iota^1 = 0;\ \xi_6^\varkappa = 0;\ V_{\iota\varkappa\lambda} = 0;\ \xi_\iota^2 = 0,$$

während in dem anderen:

$$\xi_\iota^1 = 0;\ \xi_6^\varkappa = 0;\ V_{\iota\varkappa\lambda} = 0;\ \xi_5^\varkappa = 0.$$

Wir lassen den zweiten ausser Acht und schneiden den ersten weiter durch $\xi_5^3 = 0$. Dann ist $\xi_5^1 = \xi_5^2 = \xi_5^3 = 0$ also, da $V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$ entweder $v_{123} = 0$ oder auch $\xi_5^4 = \xi_5^5 = \xi_5^6 = 0$.

Den ersteren Raum erhalten wir, in dem wir den eben erhaltenen R_{42}^{m-9}, in dem $V_{\iota\varkappa\lambda} = 0$, $\xi_\iota^1 = 0$, $\xi_6^\varkappa = 0$ ist, durch $v_{123} = 0$ schneiden. Dann ist auch $\xi_6^3 = 0$, es sei denn, dass $v_{124} = v_{125} = v_{126} = 0$ ist. Letzteres ist, wie man leicht sieht, für keinen R^{m-10} der Fall, weil die Gleichungen:

$$v_{123} = v_{124} = v_{125} = v_{126} = 0,$$

$$V_{\iota\varkappa\lambda} = 0;\ \xi_\iota^1 = 0;\ \xi_\iota^2 = 0;\ \xi_6^\varkappa = 0$$

mehr als 9 Bedingungen repräsentiren.

Es folgt daraus, dass für einen R_{42}^{m-10}

$$V_{\iota\varkappa\lambda} = 0;\ \xi_\iota^1 = \xi_\iota^2 = \xi_6^\varkappa = \xi_5^\varkappa = 0 \text{ ist.}$$

Wir führen den letzten Schnitt $\xi_4^3 = 0$.

Dann ist wieder $v_{123} = 0$ oder $\xi_\iota^3 = 0$, wie auch $\xi_4^\varkappa = 0$, folglich auch $\xi_\iota^\varkappa = 0$ für alle Werthe von ι und $\varkappa$.

Da ersterer Raum, wie oben, der vollständige Schnitt von $v_{123} = 0$ und dem R_{42}^{m-10} ist, so folgt:.

Es ist $\xi_\iota^\varkappa = 0$ ($\iota, \varkappa = 1 \ldots 6$) für einen R_{42}^{m-11}, d. h.

Das Gewicht des Systems (7) ist[1]) = 42, seine Dimension = 10. Oder: Die 11gliedrige Gruppe enthält 42 Ebenencomplexe, welche aus den eine feste

---

[1]) H. Schubert löst in den Acta math. VIII auch u. A. Aufgaben für die Ebene, jedoch eine andere Reihe, als die hier betrachtete. Nur für die ersten beiden Fälle stimmen beide überein. Seine Resultate in S. 110 Formel (16) und (17) in Verbindung mit S. 98 ergeben für $n = 6$ die Zahlen 42 resp. 21, also stimmen mit den algebraisch gefundenen überein. Gemäss der abzählenden Methode kennt Schubert nur die letzte Bedeutung der Zahl 42.

Ebene schneidenden Ebenen bestehen. Für die 9 gliedrige Gruppe ergiebt sich: 9 Ebenencomplexe haben 42 Ebenen gemein.

Ferner können wir auch wieder, wie oben, sagen: Das Gewicht der Determinanten 4. Grades der Matrix:

$$\left| v_{\iota\varkappa\lambda} \right| \left(\begin{matrix} \iota = 1 \ldots 6 \\ \varkappa, \lambda = 1 \ldots 6 \end{matrix} \right) \text{ ist } = 42.$$

Gemäss der Definition des Gewichts ergiebt sich, dass, wenn ich zu den 10 Gleichungen, welche die $\xi_\iota^\varkappa = 0$ repräsentiren, noch weitere 9 lineare in den $v_{\iota\varkappa\lambda}$ hinzufüge, die Anzahl der Lösungen $= 42$ ist. Wenn ich diese Gleichungen z. B. dadurch gebe, dass der Complex $v_{\iota\varkappa\lambda}$ 9 gegebene Ebenen enthalten soll, so ergeben sich 42 solche Complexe, d. h. Ebenen, welche die 9 gegebenen schneiden. D. h.:

Es giebt 42 Ebenen, welche 9 gegebene im Raume von 5 Dimensionen schneiden.

Wir haben nun zu den Gleichungen der Form (1) § 7 solche der Form (3) hinzuzufügen und die Zahl der Lösungen zu berechnen. Doch wollen wir nur auf die speciellen Gleichungen der Form (3) eingehen, d. i. auf diejenigen, welche geometrisch bedeuten, dass die dreigliedrige Gruppe mit einer gegebenen zweigliedrigen ein Element resp. mit einer gegebenen viergliedrigen ein Büschel gemein hat. Es sei zunächst x die Zahl der Gruppen, welche mit 1 Büschel und 7 dreigliedrigen Gruppen ein Element gemein haben. Es kann, wie bei den analogen Aufgaben über das Büschel, wieder das gegebene Büschel (a, b) ersetzt werden durch 2 unabhängige dreigliedrige Gruppen (a, b, c) und (a, b, d). Dann ist jede dreigliedrige Gruppe, welche (a, b, c) und (a, b, d) schneidet, entweder eine der x Lösungen, d. h. sie schneidet (a, b), oder aber sie liegt so, dass sie die viergliedrige Gruppe (a, b, c, d) in einem Büschel schneidet. Die beiden Theile, in die demnach die 42 Lösungen zerfallen, sind also gleich, da sie zu conjugirten Aufgaben gehören. Also $x = 42 - x$, d. h. $x = 21$. Es giebt 21 dreigliedrige Gruppen, welche

mit einer zweigliedrigen und 7 dreigliedrigen ein Element gemein haben.

Um nun die weiteren Zahlen, welche 2 gleichwerthige Bedingungen noch ausser den einfachen enthalten, nämlich, dass die dreigliedrige Gruppe mit einer zweigliedrigen ein Element, mit einer viergliedrigen ein Büschel gemein habe, zu berechnen, führen wir Symbole ein, wie in § 5 und nennen

$$(m, n, p)$$

die Zahl der dreigliedrigen Gruppen, welche mit m zwei- und n dreigliedrigen ein Element, mit p viergliedrigen jedoch ein Büschel gemein hat. Dann folgt, weil die dreigliedrige Gruppe sich selbst, die viergliedrige aber der zweigliedrigen conjugirt ist:

$$(m, n, p) = (p, n, m).$$

Ferner muss sein $2(m + p) + n = 9$.

Die eben bei $m = 1$, $n = 7$, $p = 0$ angewandte Methode ergiebt allgemein die Gleichung:

$$(m, n, p) = (m - 1, n + 2, p) - (m - 1, n, p + 1).$$

Wir wissen bereits: $(0, 9, 0) = 42$ und

$$(1, 7, 0) = (0, 7, 1) = 21.$$

Wir berechnen zunächst die Symbole, in denen m resp. $p = 0$ ist, nach einer anderen Methode, wie folgt: Es seien zunächst 2 viergliedrige Gruppen gegeben, und es sei eine dreigliedrige gesucht, welche mit ihnen 2 Büschel gemein hat, und ausserdem noch $9 - 2 \cdot 2 = 5$ dreigliedrige schneidet. Wenn aber die gesuchte (x, y, z) die beiden Gruppen in einem Büschel schneiden soll, so müssen die so entstehenden beiden Büschel als Büschel derselben dreigliedrigen Gruppe ein Element gemein haben, und dieses kann nur in dem Büschel, das beiden gemein ist, statt haben. Es muss daher dies beiden gemeinsame Büschel von (x, y, z) geschnitten werden. Aber auch jede dreigliedrige Gruppe in der viergliedrigen muss von (x, y, z) getroffen werden. Nehmen wir also je eine dreigliedrige in den viergliedrigen an, so dass sie nichts gemein haben, so muss (x, y, z) die beiden dreigliedrigen und die gemeinsame zweigliedrige treffen, ausserdem natürlich noch die 5 dreigliedrigen Gruppen, welche in

der Aufgabe enthalten sind. Wir erhalten so 21 Lösungen. Aber nicht alle sind zu brauchen. Denn es sind hier noch die Lösungen enthalten, welche die drei- und zweigliedrige Gruppe in derselben viergliedrigen in demselben Element treffen. Dies sind bei jeder viergliedrigen soviel, als es dreigliedrige Gruppen giebt, welche durch ein festes Element gehen und 6 dreigliedrige schneiden. Dies ist aber ein Problem für $n = 5$ und zwar ergiebt sich, wie wir auf S. 21 gesehen, als Zahl der Lösungen 5. Es ist also

$$(2, 5, 0) = (0, 5, 2) = 21 - 2 \cdot 5 = 11.$$

Daraus folgt: $(2, 5, 0) = (1, 7, 0) - (1, 5, 1)$, also

$$(1, 5, 1) = 21 - 11 = 10.$$

Nach der eben besprochenen Methode kann ich auch $(3, 3, 0)$ berechnen und erhalte $(3, 3, 0) = 10 - 2 \cdot 2 = 6$ und zuletzt auch $(4, 1, 0) = 5 - 2 \cdot 1 = 3$.

Jetzt berechnen wir die Symbole m und $p > 0$. Also zunächst für $n = 3$. Es ist

$(1, 3, 2) = (2, 3, 1) = (0, 5, 2) - (0, 3, 3) = 11 - 6 = 5.$

Weitere sind für $n = 3$ nicht vorhanden, da $m + p = \frac{9-3}{2} = 3$. Für $n = 1$ ist $m + p = \frac{9-1}{2} = 4$, also ist zu berechnen:

$(3, 1, 1) = (2, 3, 1) - (2, 1, 2)$, aber $(4, 1, 0) = (3, 3, 0) - (3, 1, 1)$, folglich $(3, 1, 1) = 3$ und $(2, 1, 2) = 2$.

Wir stellen alles zusammen:

Es giebt (m, n, p) dreigliedrige Gruppen, welche mit m zwei- und n dreigliedrigen ein Element, mit p viergliedrigen aber ein Büschel gemein haben und zwar ist $(m, n, p) = (p, n, m)$ und:

$$(0, 9, 0) = 42;\ (1, 7, 0) = 21;$$
$$(2, 5, 0) = 11;\ (1, 5, 1) = 10;$$
$$(3, 3, 0) = 6;\ (1, 3, 2) = 5;$$
$$(4, 1, 0) = 3;\ (3, 1, 1) = 3;\ (2, 1, 2) = 2.$$

Man kann auch noch andere Bedingungen einführen, z. B. dass (x, y, z) mit einer gegebenen dreigliedrigen Gruppe ein Büschel gemein hat. Es ist dies nach III. S. 14 eine vierfache Bedingung, so dass noch 5 hinzuzufügen sind. Kommt darunter eine zweifache, z. B. das Schneiden eines Büschels

vor, so muss (x, y, z) die eine dreigliedrige Gruppe in einem Büschel und ein Büschel schneiden, d. h. sie muss in der von beiden gebildeten fünfgliedrigen liegen, so dass wir auf ein schon gelöstes Problem $n = 5$ kommen. Ist z. B. ein Büschel und 3 dreigliedrige Gruppen gegeben ausser der dreigliedrigen, die (x, y, z) in einem Büschel schneidet, so führt dies auf die Aufgabe, für $n = 5$ eine dreigliedrige Gruppe zu construiren, so, dass sie eine dreigliedrige in einem Büschel, aber 4 zweigliedrige in einem Element trifft. Es ergiebt dies nach S. 21 3 Lösungen. Da aber der allgemeine Fall von 5 dreigliedrigen Gruppen doppelt so viel Lösungen haben muss (S. 64), so folgt:

Es giebt 6 dreigliedrige Gruppen, welche mit 1 dreigliedrigen ein Büschel und mit 5 ein Element gemein haben.

Obgleich es nur eine $2 . 4 = 8$fache Bedingung für eine dreigliedrige Gruppe ist, mit 2 dreigliedrigen ein Büschel gemein zu haben, so ist dies doch bei allgemeiner Lage nicht möglich, da 2 Büschel einer dreigliedrigen Gruppe ein Element gemein haben. Es müssten also die 2 gegebenen dreigliedrigen ein Element gemein haben. Wir werden diese Eigenschaft noch weiterhin zur Ableitung interessanter geometrischer Sätze verwenden.

Wir schliessen damit die Constructionen[1]) der dreigliedrigen Gruppe und den ersten algebraischen Theil überhaupt ab. Es ergiebt sich, dass die 3gliedrige Gruppe grössere Schwierigkeiten der algebraischen Behandlung entgegensetzt, wie die 2gliedrige, aus dem Grunde, weil „das mächtige Instrument der Algebra“, die Determinanten, zunächst versagt. An ihre Stellen traten hier bei $n = 6$ die Grössen $\xi_\iota^\varkappa$, welche ebenso, wie bei einem System von 2 Indices, hier bei dreien den Defect bestimmten. Ob es für allgemeines n analoge Grössen giebt, muss einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

---

[1]) Die Fälle, wo die dreigliedrigen Gruppen Gleichungen von der Form $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota y_\varkappa = \Sigma a_{\iota\varkappa} y_\iota z_\varkappa = \Sigma a_{\iota\varkappa} z_\iota x_\varkappa = 0$ genügen, lassen sich mit Hilfe der Bemerkung auf S. 40 leicht als Differenzen hier behandelter Zahlen lösen.

Die geometrische Deutung.

§ 10.

Die Gebilde von fünf Constanten. Versuch einer Geometrie des Strahlenbüschels im Raume. Der Kegelschnitt. Der Strahlencomplex.

Wir haben bisher die Gruppen einer fünffachen Mannigfaltigkeit betrachtet, ohne über die Elemente derselben irgend welche Voraussetzung zu treffen. Wir gehen jetzt dazu über, durch Deutung der Elemente geometrische Resultate zu erlangen.

In Frage kommen als Elemente der Gruppen nur die Gebilde von fünf Constanten. Solcher giebt es sehr viele, zusammengesetzte und einfache. Wenn man nämlich ein Gebilde von p Constanten nimmt, in ihm ein solches von q Constanten, so ergiebt sich so ein zusammengesetztes Gebilde von $p + q$ Constanten. Wenn wir auf diese Weise Gebilde von 5 Constanten in Ebene und Raum suchen, so ergiebt sich z. B. das Punkttripel auf einer Geraden in der Ebene. Denn eine Gerade hat 2, jeder ihrer Punkte 1 Constante. Dasselbe ist hier natürlich nicht zu brauchen, da schon die Büschelbildung unmöglich ist. Wir wollen aber, obwohl nur kurz, auf ein anderes Gebilde des Raumes hinweisen, das, wenn es auch hier nicht zu brauchen ist, doch einer näheren Untersuchung werth zu sein scheint und nach mancher Hinsicht zu der Geraden im Raume Analogien bietet. Es ist dies das Strahlenbüschel im Raume.

Dasselbe hat 5 Constante, z. B. die 3 der Ebene und die 2 des Punktes, des Centrums, in ihr. Wie die Gerade steht auch das Strahlenbüschel sich selbst dual gegenüber. Denn der Gesammtheit aller Strahlen in einer Ebene und durch einen Punkt entspricht die Gesammtheit der Strahlen durch einen Punkt und in einer Ebene. Es hat aber noch weitere Beziehungen zu der Geraden. So kann es z. B. durch 2 Strahlen gegeben werden, die als Complexe betrachtet involutorisch liegen. Ferner lässt sich auch der lineare Strahlencomplex auffassen als Nullsystem. Er ordnet dann jedem Punkte des Raumes eine Ebene durch ihn zu, jeder

Ebene einen Punkt in ihr, oder, wie wir auch sagen können, er ordnet jedem Punkte ein ebenes Strahlenbüschel zu, das in ihm sein Centrum hat, jeder Ebene ein solches, das in ihr liegt. Der Complex lässt sich also betrachten als Configuration von ebenen Strahlenbüscheln im Raume, d. h. von ebensoviel, als es Ebenen bezw. Punkte giebt, also von ∞^3. Da es aber ∞^5 Strahlenbüschel giebt, so folgt, dass es die Gesammtheit der zwei Bedingungen genügenden ebenen Strahlenbüscheln ist. Wenn wir also Gebilde von Strahlenbüscheln betrachten, welche dem Complexe bei Geraden entsprechen, so sind dieselben allgemeiner, d. h. erst der Schnitt zweier solcher, welche die Gesammtheit aller einer Bedingung genügenden Strahlenbüschel enthalten, ist ein linearer Strahlencomplex. Wir verfolgen dies an dieser Stelle nicht weiter, es scheint aber noch einer weiteren geometrischen Untersuchung sehr wohl werth zu sein.

Was uns hier unmittelbar interessirt, ist die Gruppenbildung. Das Büschel, d. i. die zweigliedrige Gruppe ist leicht zu definiren. Denn die beiden constituirenden Strahlenbüschel bestimmen durch ihre Ebenen ein Ebenenbüschel, durch ihre Centren eine Punktreihe, und es entspricht jeder Ebene der in ihr liegende Punkt der Punktreihe. Das Substrat der Gruppe sind 2 Gerade a und b, die nicht vertauschbar sind. Auf der einen liegen alle Centren, durch die andere gehen alle Ebenen. Die 8 Constanten der Gruppe sind die 2 . 4 Constanten der beiden Geraden. Die Bildung der 3 gliedrigen Gruppe ist geometrisch aus der der 2 gliedrigen ableitbar. Durch Bildung der zweigliedrigen zweier Elemente und durch Verbindung der Elemente derselben mit dem dritten Constituenten derselben durch Büschel wird sie erhalten. Nothwendige Bedingung ist dabei das Bestehen des associativen Princips, d. h. es muss jedes Element erhalten werden können, gleichviel in welcher Reihenfolge ich die 3 Constituenten durch Büschel verbinde. Dieses associative Princip ist hier nicht gültig. Denn wäre es gültig, so entspräche in der Ebene der 3 Mittelpunkte der gegebenen Constituenten, die auch die Ebene aller Mittelpunkte der Gruppe wird, jedem Punkte eine Gerade, nämlich der einzige in dieser Ebene liegende

Strahl des durch ihn gehenden Strahlenbüschels. Wir hätten also eine Reciprocität in der Ebene von der Art, dass die Polare durch den Pol geht. Dies ist bei allgemeiner Lage der 3 constituirenden ebenen Strahlenbüscheln unmöglich.

Dagegen muss bei den Gebilden, welche von 5 Constanten so abhängen, dass sie durch 6 ihren Verhältnissen nach gegebenen Grössen eindeutig bestimmt werden können, die Deutung der Resultate des ersten Abschnitts unmittelbar möglich sein. Auch die Gruppenbildung wird durch die lineare Zusammensetzung der Coordinaten unmittelbar definirt und die Gültigkeit des associativen Princips folgt aus der Gültigkeit desselben bei der Addition. Solcher Gebilde giebt es, soweit ich sehe, 2, d. i. der Kegelschnitt in der Ebene und der lineare Strahlencomplex im Raume. Auf die Geometrie der Gruppen dieser beiden Gebilde wenden wir unsere Resultate an.

Die Geometrie der Kegelschnittgruppen.

§ 11.

Die Substrate der Gruppen: Punkt- und Strahlenquadrupel, Curve dritter Ordnung und Klasse und ihre geometrische Abhängigkeit, falls die zugehörigen Gruppen sich schneiden.

Unter dem Substrat einer Gruppe verstehen wir diejenigen ausgezeichneten Gebilde, welche in Bezug auf die ganze Gruppe eine solche bevorzugte Stellung einnehmen, dass sie durch die Gruppe bestimmt werden und dieselbe auch, wenn auch nicht nothwendig eindeutig, bestimmen. Solche Substrate sind, falls wir die Elemente als Curven zweiter Ordnung deuten, bei der zweigliedrigen Gruppe das Punktquadrupel, in welchem sich alle Curven schneiden, für die dreigliedrige die Jacobi'sche (Tripel-) Curve und für die viergliedrige Gruppe das Quadrupel derjenigen 4 Strahlen, welche specielle Elemente der Gruppe sind. Man kann daher die von uns gegebenen Sätze über Constructionen nicht nur für die Constructionen von Kegelschnittbüschel, Netzen und viergliedrigen Gruppen deuten, sondern auch für Constructionen von Punktquadrupeln bezw. Strahlenquadrupeln und

Curven dritter Ordnung. Die Constantenzahl der Gebilde stimmt natürlich mit der der Gruppe überein. Wenn wir dies aber thun wollen, müssen wir die im § 5 resp. § 9 verwendeten Bedingungen für diese ausgezeichneten Elemente deuten. Dass 2 zweigliedrige Gruppen ein Element gemein haben, heisst, dass die 2 . 4 Punktquadrupel, welche durch sie bestimmt werden, Punkte eines und desselben Kegelschnittes sind. Dass eine zweigliedrige und eine dreigliedrige ein Element gemein haben, lässt in diesem Sinne eine übersichtliche Deutung nicht zu. Wir können eine solche etwa aus der folgenden Interpretation gewinnen. Wenn nämlich ein Büschel und eine viergliedrige Gruppe ein Element gemein haben, so liegt das Punkt- mit dem Strahlenquadrupel so, dass die Determinante:

$$(1) \qquad \left| \left(a^{\iota} \, (\alpha^{\varkappa}) \right)^2 \right| = 0 \text{ ist } (\iota, \varkappa = 1 \ldots 4),$$

wo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ die 4 Grundpunkte des Büschels $(a^1 \ldots a^4)$ die 4 Strahlen der 4gliedrigen Gruppe sind.

Wenn nun ein Büschel und eine dreigliedrige Gruppe ein Element gemein haben, so giebt es ∞ viergliedrige Gruppen, welche durch die dreigliedrige hindurchgehen und folglich die zweigliedrige schneiden. Es ist aber auch hinreichend, dass es solche viergliedrige Gruppen giebt, welche durch die dreigliedrige hindurchgehen und die gegebene zweigliedrige schneiden. Da nun eine viergliedrige dann und nur dann durch eine dreigliedrige hindurchgeht, wenn das zugehörige Strahlenquadrupel die zu der dreigliedrigen zugehörige Curve 3. Ordnung in einem vollständigen Vierseit schneidet, d. h. wenn die Ecken desselben auf der Curve liegen, so folgt: Wenn eine zwei- und eine dreigliedrige Gruppe ein Element gemein haben, so muss jedes (Polar-)Vierseit, welches auf der Tripelcurve der letzteren liegt, zu den vier Grundpunkten des Büschels so liegen, dass die Gleichung (1) besteht.

In dem bereits Gesagten liegt implicite auch schon die Bedingung für 2 Kegelschnittnetze, die ein Büschel gemein haben. Denn beide liegen dann in derselben Gruppe von 4 Elementen, d. h.:

2 Kegelschnittnetze haben dann und nur dann ein Büschel gemein, wenn die zugehörigen Tripelcurven sich in einem vollständigen Vierseit schneiden.

Wenn endlich 2 Netze ein Element gemein haben, so verwenden wir zur Deutung hier, wie beim Complex, folgenden allgemeinen Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich 2 dreigliedrige Gruppen (von beliebigen Elementen) in einem Element schneiden, ist die, dass es eine und folglich ∞ giebt, welche beide in einem Büschel treffen. (Vergl. S. 67.)

Wir übertragen dies unmittelbar auf Kegelschnitte:

Wenn 2 Netze ein Element gemein haben, so liegen die beiden zugehörigen Tripelcurven so, dass es eine und folglich unendlich viele Curven 3. Ordnung giebt, welche beide in vollständigen Vierseiten schneiden, und umgekehrt.

Man kann sich noch die Frage vorlegen, ob die eben bemerkte Eigenschaft für jedes der 3 Netze, die zu einer und derselben Curve 3. Ordnung gehören, besteht oder nicht. Dies ist jedoch nicht der Fall. Wenn ich vielmehr gemäss obigem Satze eine Curve 3. Ordnung zeichne, welche die beiden zu den vorliegenden Netzen gehörigen Curven 3. Ordnung je in den 6 Ecken eines vollständigen Vierseits schneidet, so ist damit durch die 3 Eckenpaare auf jeder Curve die Zuordnung der Punkte bestimmt und daher auch die beiden zugehörigen Netze. Ich mache hier gleich darauf aufmerksam, dass bei Complexen die Entscheidung dieser Frage im umgekehrten Sinne ausfällt.

§ 12.

Die Constructionen der Kegelschnittgruppen.

Wir übertragen zunächst unmittelbar die Resultate der §§ 5 und 9 auf Kegelschnitte:

Es giebt 14 Kegelschnittbüschel, welche mit 8 gegebenen viergliedrigen Gruppen je ein Element gemein haben.

Es giebt 9, 6, 4, 3 Kegelschnittbüschel, welche mit 6, 4, 2, 0 viergliedrigen Kegelschnittgruppen und mit 1, 2, 3, 4 Netzen einen Kegelschnitt gemein haben. (Die an gleicher Stelle stehenden Zahlen gehören zusammen.)

Es giebt 4, 3, 2 Kegelschnittbüschel, welche mit einem Büschel, mit 0, 1, 2 Netzen und mit 5, 3, 1 viergliedrigen Gruppen je ein Element gemein haben.

Es giebt 2, 1 Kegelschnittbüschel, welche mit 2 Kegelschnittbüscheln und mit 0, 1 Netzen und mit 2, 0 viergliedrigen Gruppen je einen Kegelschnitt gemein haben.

Entsprechend lauten die Aufgaben für viergliedrige Gruppen:

Es giebt 14, 9, 6, 4, 3 viergliedrige Kegelschnittgruppen, welche mit 8, 6, 4, 2, 0 Kegelschnittbüscheln und mit 0, 1, 2, 3, 4 Kegelschnittnetzen je ein Element gemein haben.

Es giebt 4, 3, 2 viergliedrige Gruppen, welche mit 0, 1, 2 Netzen und mit 5, 3, 1 Kegelschnittbüscheln einen Kegelschnitt, zugleich aber mit einer viergliedrigen Gruppe ein Kegelschnittbüschel gemein haben.

Es giebt 2, 1 viergliedrige Gruppen, welche mit 0, 1 Netzen und mit 2, 0 Kegelschnittbüscheln einen Kegelschnitt, zugleich aber mit 2 viergliedrigen Gruppen ein Kegelschnittbüschel gemein haben.

Die Resultate für Netze lauten nach § 9:

Es giebt 42, 21, 11, 6, 3 Kegelschnittnetze, welche mit 9, 7, 5, 3, 1 Kegelschnittnetzen und mit 0, 1, 2, 3, 4 Kegelschnittbüscheln einen Kegelschnitt gemein haben.

Es giebt 21, 11, 6, 3 Kegelschnittnetze, welche mit 7, 5, 3, 1 Kegelschnittnetzen einen Kegelschnitt und mit 1, 2, 3, 4 viergliedrigen Gruppen ein Kegelschnittbüschel gemein haben.

Es giebt ferner 10, 5, 3 Kegelschnittnetze, welche mit einer viergliedrigen Gruppe ein Kegelschnittbüschel und mit 5, 3 1 Netzen und 1, 2, 3 Kegelschnittbüscheln einen Kegelschnitt gemein haben.

Es giebt 5, 2 Kegelschnittnetze, welche mit 3, 1 Kegelschnittnetzen und 1, 2 Kegelschnittbüscheln einen Kegelschnitt, aber mit 2 viergliedrigen Gruppen ein Kegelschnittbüschel gemein haben.

Es giebt 3 Kegelschnittnetze, welche mit einem Kegelschnittnetz und einem Büschel einen Kegelschnitt, aber mit 3 viergliedrigen Gruppen ein Büschel von solchen gemein haben.

Es giebt endlich 6 Kegelschnittnetze, welche mit einem ein Kegelschnittbüschel, mit 5 aber nur einen Kegelschnitt gemein haben.

Gemäss der Erörterungen des § 11 können wir auch die Aufgaben für Punktquadrupel resp. Curven 3. Ordnung aussprechen. Wir begnügen uns damit, dies von den beiden allgemeinsten Aufgaben zu thun. Die erste lautet dann:

Es giebt 14 Punktquadrupel, welche mit 8 gegebenen Strahlenquadrupeln der Bedingung (1) § 11 genügen, oder: Es giebt 14 Punktquadrupel, durch welche Kegelschnitte gehen, die je eines von 8 gegebenen Vierseiten zu Polarvierseiten haben.

Wenn man endlich nach der Zahl der C_3 frägt, welche zu 9 gegebenen so liegen, wie wir es oben angegeben haben, so müssen wir jede C_3 in ihre 3 Netze zerlegen. Jedem Netz, das dann von jedem der 9 . 3 Netze immer eines schneidet, gehört eine C_3 der verlangten Art zu. Solcher Combinationen sind 3^9 möglich. Es giebt demnach i. A. $3^9 . 42 = 826686$ Curven 3. Ordnung, welche zu 9 gegebenen so liegen, dass es eine und folglich unendlich viele Curven 3. Ordnung giebt, welche beide in vollständigen Vierseiten schneiden.

Die Geometrie der Gruppen von linearen Strahlencomplexen.

§ 13.

Die Substrate der Gruppen: Das Geradenpaar im Raume, die Oberfläche 2. Ordnung und ihre geometrische Abhängigkeit, falls die zugehörigen Gruppen sich schneiden.

Das Substrat der zweigliedrigen Complexgruppe, d. i. der linearen Congruenz, ist das Geradenpaar, welches von allen gemeinsamen Strahlen der Gruppe geschnitten wird, also die Directrices. Ebenso ist das Substrat der viergliedrigen Gruppe das Geradenpaar, das allen Complexen der Gruppe gemeinsam ist. Das Substrat der dreigliedrigen Complexgruppe ist das Hyperboloid oder, wie wir, wenn wir von der Frage nach der Realität der Geraden absehen, sagen können, die Oberfläche 2. Ordnung, welche die allen Complexen gemeinsamen Strahlen enthält.

Und zwar haben 2 Congruenzen einen Complex gemein, wenn ihre 2 . 2 Geraden (Directrices) hyperbolisch liegen.

Eine Congruenz und eine dreigliedrige Complexgruppe haben dann und nur dann einen Complex gemein, wenn es 2 Gerade der zu der Gruppe gehörigen Regelschaar giebt, welche die Directrices der Congruenz schneiden. Aus diesen Kriterien lassen sich die für viergliedrige Gruppen unmittelbar ableiten, wenn man berücksichtigt, dass die zu einer Congruenz conjugirte viergliedrige die beiden Directrices zu gemeinsamen Strahlen hat, dass ferner die zu einer dreigliedrigen conjugirte dreigliedrige mit ihr dieselbe Oberfläche 2. Ordnung besitzt.[1]) Es bleibt daher nur noch das sich selbst conjugirte Schneiden einer zwei- und viergliedrigen Gruppe übrig. Wir erhalten 2 Geradenpaare, die in einer umkehrbaren Beziehung stehen, d. h. es giebt einen Complex, der durch das erste geht und das zweite zu einem conjugirten Geradenpaar hat, und ebenso giebt es einen Complex, bei dem die Rollen des ersten und zweiten vertauscht sind. Man kann nun folgendes Kriterium aufstellen.

---

[1]) Pasch l. c. S. 135.

Es schneiden die beiden die 4 Geraden treffenden Strahlen das erste Paar in a, b bezw. a^1, b^1, das zweite in c, d bezw. c^1, d^1, so dass also z. B. | a b c d | der eine Strahl ist. Dann muss der Complex, der | a a^1 | und | b b^1 | enthält, bei dem dagegen | c c^1 | und | d d^1 | conjugirt sind, die Strahlen | c d^1 | und | c^1 d | enthalten. Der andere Complex dagegen hat | a a^1 | und | b b^1 | zu conjugirten Geraden und enthält | a b^1 |, | a^1 b |, | c c^1 |, | d d^1 |.

Im ersten ist die zu | a b^1 | conjugirte Gerade offenbar | a^1 b |. Denn es sind auch | a b c d | und | a^1 b^1 c^1 d^1 | Complexstrahlen. Mithin liegen | a b^1 |, | a^1 b |, | c c^1 |, | d d^1 | hyperbolisch [1]), und da | a b c d | und | a^1 b^1 c^1 d^1 | 2 Gerade der anderen Regelschaar sind, so folgt

$$(a\ b\ c\ d) = (b^1\ a^1\ c^1\ d^1) \text{ oder}$$
$$(a\ b\ c\ d)\ (a^1\ b^1\ c^1\ d^1) = +1.$$

Dies ist die nothwendige und hinreichende Bedingung. Was die Kriterien für die Lage der dreigliedrigen Gruppen untereinander angeht, so haben 2 dreigliedrige Gruppen eine zweigliedrige gemein, wenn sie in einer viergliedrigen liegen. In diesem Falle müssen die beiden zugehörigen Oberflächen 2. Ordnung 2 sich i. A. nicht schneidende Gerade gemein haben, die beiden zur viergliedrigen Gruppe gehörigen nämlich. Die Raumcurve 4. Ordnung zerfällt demnach in dieses Strahlenpaar und in eine Raumcurve 2. Ordnung. Letztere kann keine ebene Curve sein, weil sonst nach einem bekannten Satze [2]) auch erstere eine solche sein müsste. Folglich sind es 2 sich nicht schneidende Gerade. Wenn nun diese Geraden die beiden ersten nicht schnitten, so gäbe es durch sie allerhöchstens eine Oberfläche 2. Ordnung, folglich müssen beide sich schneiden, d. h. die Oberflächen schneiden sich in einem windschiefen Vierseit. Wenden wir nun den S. 72 bei der analogen Frage für Kegelschnitte benutzten Satz an, so ergiebt sich:

2 dreigliedrige Complexgruppen haben dann und nur dann einen Complex gemein, wenn die zu-

---

[1]) Reye, Geometrie der Lage, Bd. 2 S. 71.
[2]) Hesse, Anal. Geom. d. Raumes, S. 123.

hörigen Oberflächen 2. Ordnung von einer dritten und folglich von unendlich vielen in windschiefen Vierseiten geschnitten werden können.

Wenn das eine Paar Regelschaaren zweier Oberflächen einen Complex gemein hat, so muss offenbar auch das andere einen Complex gemein haben, denn wenn 2 dreigliedrige Gruppen ein Element gemein haben, so auch die conjugirten.

Durch 2 in der eben beschriebenen Lage befindlichen Oberflächen werden also gleichzeitig 2 (involutorisch gelegene) Complexe gegeben. Es liegt die Frage nach den Directrices derselben nahe.

Suchen wir solche windschiefe Vierseite zu construiren. Es seien die Regelschaaren der einen Oberflächen g und h, die der zweiten G und H so, dass durch g und G ebenso wie durch h und H ein Complex geht. Der erstere sei durch A, der zweite durch B bezeichnet. Dann wird eine dritte Oberfläche, die beide in windschiefen Vierseiten schneidet, etwa die eine in g g′, h h′, die zweite in G G′ und H H′ so liegen, dass g g′, h h′, kurz alle Gegenkanten der Vierseite conjugirte Gerade sind in Bezug auf den Complex, dem sie nicht angehören. Z. B. muss die zu g conjugirte Gerade in Bezug auf B erstens auf der Oberfläche (g, h) liegen, weil g alle Geraden h schneidet, zweitens aber auch auf der durchgelegten 3. Oberfläche, weil g auch hier alle Geraden, die der Regelschaar h h′ angehören, schneidet, folglich muss die conjugirte g′ sein. Umgekehrt suche ich auf den beiden vorliegenden Oberflächen zu 2 Geraden g und G die conjugirten g′ und G′ in Bezug auf den Complex B, so geht durch dieselben eine 3. Oberfläche, welche beide in windschiefen Vierseiten schneidet.

Die Diagonalen des windschiefen Vierseits schneiden sowohl ein zu A conjugirtes Paar h h′, als auch ein zu B conjugirtes, folglich gehören sie beiden Complexen an und werden von den Directrices geschnitten. Nun sind die Diagonalen reciproke Gerade in dem Polarsystem der Fläche 2. Ordnung, der das Vierseit angehört. Nehmen wir mehrere solche Vierseite (es giebt ∞^2) auf derselben Fläche

2. Ordnung, so können wir zweifellos eine Anzahl, z. B. 3 so wählen, dass die Diagonalen nicht auf demselben Hyperboloid liegen, so dass es höchstens 2 Gerade geben kann, welche alle treffen. Allein es giebt 2 solche, nämlich die Directrices. Ist eine derselben a, so muss die zu a reciprok polare Gerade in Bezug auf dieselbe Fläche ebenfalls alle die Geraden schneiden, denn wenn sich 2 Gerade schneiden, so schneiden sich auch ihre reciproken Polaren; wenn also eine Gerade eine zweite und deren reciproke Polare schneidet, so muss die zu ihr polare ebenfalls beide schneiden. Daraus folgt, dass die beiden Directrices in Bezug auf beide Flächen reciprok polar sind. Solcher Geradenpaare giebt es aber nur 3. Denn ist x ein Punkt auf a und a′ reciprok polar in Bezug auf 2 Flächen 2. Ordnung, so geht die Polarebene von x in Bezug auf beide durch a′ und schneidet a in y bezw. z. Dann ist:

$$x \overline{\wedge} y \text{ und involutorisch}$$
$$x \overline{\wedge} z \quad = \quad =$$
$$\text{folglich} \qquad y \overline{\wedge} z.$$

Sind d und d^1 die Doppelelemente der Punktreihen y und z, so giebt es also zu d einen Punkt $\overline{x}$ der Art, dass $\overline{x}$ conjugirt d in Bezug auf beide Flächen ist. Dann geht aber die Polarebene von d in Bezug auf beide Flächen durch $\overline{x}$, d. h. $\overline{x}$ ist das zweite Doppelelement.

Ebenso lassen sich auf a′ 2 Punkte e und e^1 finden.

Dann ist die Polarebene von d $[d^1\ e\ e^1]$
$= \quad = \quad = \quad d^1\ [d\ \ e\ e^1]$
$= \quad = \quad = \quad e\ [e^1\ d\ d^1]$
$= \quad = \quad = \quad e^1\ [e\ \ d\ d^1]$
} in Bezug auf beide Flächen,

d. h. d d^1 e e^1 ist das gemeinsame Polartetraeder:

Wenn 2 Oberfächen 2. Ordnung so liegen, dass das eine Paar von Regelschaaren einem Complex angehört, so gehört auch das andere Paar einem (andern) Complexe an. Die Directrices beider sind ein Paar Gegenkanten des gemeinsamen Polartetraeder, während die anderen 4 Kanten Strahlen beider Complexe sind.

§ 14.

Die Constructionen der Complexgruppen.

Auch hier sei zunächst nur unmittelbar das in §§ 5 und 9 Gegebene übertragen:

Es giebt 14 lineare Congruenzen, die mit 8 gegebenen viergliedrigen Complexgruppen je einen Complex gemein haben.

Es giebt 9, 6, 4, 3 lineare Congruenzen, die mit 6, 4, 2, 0 viergliedrigen Gruppen und mit 1, 2, 3, 4 dreigliedrigen einen Complex gemein haben.

Es giebt 4, 3, 2 lineare Congruenzen, welche mit einer Congruenz, mit 0, 1, 2 dreigliedrigen und 5, 3, 1 viergliedrigen Gruppen einen Complex gemein haben.

Es giebt 2, 1 lineare Congruenzen, die mit 2 Congruenzen und mit 0, 1 dreigliedrigen, sowie mit 2, 0 viergliedrigen Gruppen einen Complex gemein haben.

Entsprechend lauten die Aufgaben für viergliedrige Gruppen:

Es giebt 14, 9, 6, 4, 3 viergliedrige Complexgruppen, die mit 8, 6, 4, 2, 0 linearen Congruenzen und mit 0, 1, 2, 3, 4 dreigliedrigen Gruppen einen Complex gemein haben.

Es giebt 4, 3, 2 viergliedrige Complexgruppen, welche mit 0, 1, 2 dreigliedrigen und 5, 3, 1 linearen Congruenzen einen Complex, zugleich aber mit einer viergliedrigen Gruppe eine lineare Congruenz gemein haben.

Es giebt 2, 1 viergliedrige Complexgruppen, welche mit 0, 1 dreigliedrigen Gruppen und 2, 0 Congruenzen je einen Complex, zugleich aber mit 2 viergliedrigen eine Congruenz gemein haben.

Die Resultate für dreigliedrige Gruppen lauten nach § 9:

Es giebt 42, 21, 11, 6, 3 dreigliedrige Complexgruppen, welche mit 9, 7, 5, 3, 1 gegebenen drei-

gliedrigen und mit 0, 1, 2, 3, 4 linearen Congruenzen einen Complex gemein haben.

Es giebt 21, 11, 6, 3 dreigliedrige Gruppen, welche mit 7, 5, 3, 1 dreigliedrigen einen Complex, mit 1, 2, 3, 4 viergliedrigen jedoch eine lineare Congruenz gemein haben.

Es giebt ferner 10, 5, 3 dreigliedrige Complexgruppen, welche mit einer viergliedrigen Gruppe eine lineare Congruenz, mit 5, 3, 1 dreigliedrigen dagegen, sowie mit 1, 2, 3 linearen Congruenzen einen Complex gemein haben.

Es giebt 5, 2 dreigliedrige Complexgruppen, welche mit 3, 1 dreigliedrigen Gruppen und 1, 2 linearen Congruenzen einen Complex, mit 2 viergliedrigen aber eine lineare Congruenz gemein haben.

Es giebt 3 dreigliedrige Complexgruppen, welche mit einer dreigliedrigen Gruppe und einer linearen Congruenz einen Complex, mit 3 viergliedrigen jedoch eine lineare Congruenz gemein haben.

Es giebt endlich 6 dreigliedrige Gruppen, welche mit einer eine lineare Congruenz, mit fünfen aber einen Complex gemein haben.

Alle diese Aufgaben lassen sich nach § 13 auch als Aufgaben für Geradenpaare bezw. Oberflächen 2. Ordnung aussprechen, z. B. die erste als:

Es giebt 14 Geradenpaare im Raume, welche mit 8 Geradenpaaren so liegen, dass das Product der Doppelverhältnisse, welche auf ihm und je einem der 8 von den 2 gemeinsam schneidenden Strahlen ausgeschnitten werden, $= +1$ ist. Ferner z. B.:

Es giebt 1 Geradenpaar, welches mit 2 gegebenen hyperbolisch liegt und 2 Gerade einer gegebenen Regelschaar schneidet.

Die allgemeinste Aufgabe über dreigliedrige Gruppen bezw. Regelschaaren lautet:

Es giebt 42 Regelschaaren, welche mit 9 gegebenen so liegen, dass es ein und folglich unendlich viele Paare von Geradenpaaren der beiden Schaaren giebt, welche hyperbolisch liegen. Oder als Aufgabe für Oberflächen 2. Ordnung, wobei erstens zu berücksichtigen, dass es auf jeder 2 Schaaren von Geraden giebt, zweitens, dass der Satz auf S. 78 gilt:

Es giebt $2^8 . 42 = 10752$ Oberflächen 2. Ordnung, welche mit 9 gegebenen so liegen, dass es eine und folglich unendlich viele Oberflächen 2. Ordnung giebt, welche mit beiden ein windschiefes Vierseit gemein hat.

Wir beschliessen damit auch die geometrische Deutung unserer Resultate und die Arbeit überhaupt. Ob auch die allgemeinen, von uns behandelten Strahlen- und Ebenencomplexe der fünffachen Mannigfaltigkeit, als Complexe von Punkt- und Strahlenquadrupel bezw. Curven 3. Ordnung oder als Complexe von Geradenpaaren im Raume bezw. Regelschaaren oder Oberflächen 2. Ordnung gedeutet, geometrisches Interesse darbieten, muss einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Lebenslauf.

Ich, Otto Landsberg, jüdischer Confession, bin geboren den 29. Mai 1865 zu Breslau als Sohn des Kaufmanns Wilhelm Landsberg und seiner Ehefrau Helene, geb. Sachs. Meine Schulbildung erhielt ich auf dem Königl. Friedrichs-Gymnasium zu Breslau, das ich Ostern 1883 mit dem Zeugniss der Reife verliess. Seitdem widmete ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften auf den Universitäten Breslau und Berlin. Am 30. Juli 1888 bestand ich bei der philosophischen Facultät der Universität Breslau das Examen rigorosum. Vom 1. October 1888 bis 30. September 1889 genügte ich meiner Militärpflicht als Einjährig-Freiwilliger bei der 6. Compagnie Grenadier - Regiments „Kronprinz Friedrich Wilhelm“ (2. Schles.) No. 11.

Während meiner Studienzeit besuchte ich die Vorlesungen folgender Herren Professoren und Docenten:

in Berlin: du Bois-Reymond, Curtius, Dilthey, Förster, Fuchs, Glan, Kronecker, Weierstrass;

in Breslau: Auerbach, F. Cohn, B. Erdmann, Galle, Gürich, Löwig, O. E. Meyer, Oginski, Partsch, Roemer, Rhode, Rosanes, Schneider, Schröter, Staude, L. Weber, Vischer.

Mehrere Semester hindurch war ich Mitglied des mathematisch-physikalischen Seminars unter Leitung der Herren Professoren Meyer, Rosanes und Schröter, sowie des philosophischen Seminars unter Leitung des Herrn Professor B. Erdmann.

Allen meinen verehrten Lehrern spreche ich für die mir zu Theil gewordene Anregung und Förderung meinen herzlichsten Dank aus.

Thesen.

I. Der Lehrstoff der ebenen Geometrie auf unseren höheren Lehranstalten ist zu Gunsten der Raumgeometrie und der geometrischen Mechanik wesentlich zu beschränken.

II. Die Einführung der negativen, gebrochenen und algebraisch irrationalen Zahlen ist sachlich nicht nothwendig und geschieht nur aus Zweckmässigkeitsgründen.

III. Der Fortschritt der wissenschaftlichen Geometrie muss dahin gehen, die bei der Einführung eines jeden Axioms vorhandenen Möglichkeiten getrennt zu erörtern. Die Ableitung der Axiome aus der Erfahrung ist nur von secundärer Bedeutung.

IV. Das Ziel der Mathematik ist die Behandlung des Unstetigen. Die Untersuchung des Stetigen ist nur als Vorstufe dafür zu betrachten.

V. Auch die impersonalen (von einigen Logikern subjectlos genannten) Urtheile haben ein bestimmtes logisches Subject.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Landsberg, Otto,

Untersuchungen über die Gruppen einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit
Inaug.-Diss

Breslau 1889

Math.p. 491 u#Beibd.3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651639-1